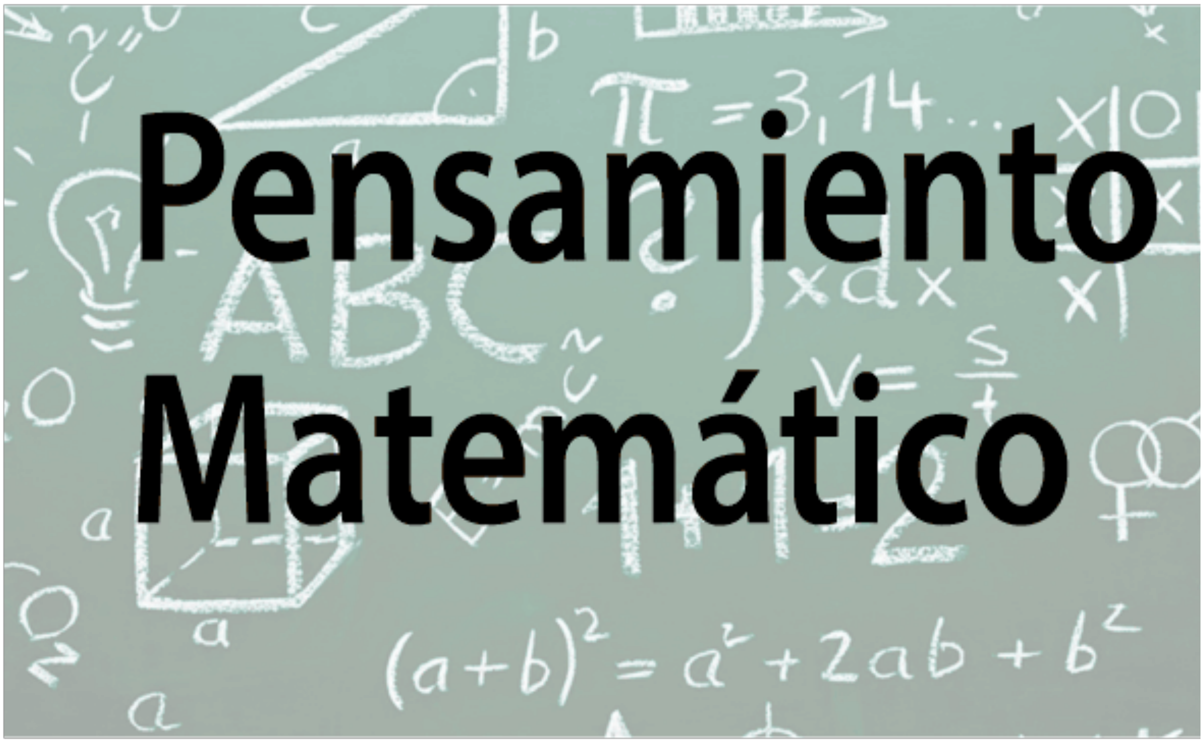
2017



Pensamiento Matemático

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán

Pensamiento matemático

Elemental

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán

Morelia. Michoacán.
Diciembre de 2017

Directorio

Secretario de Educación Pública
Maestro Aurelio Nuño Mayer

Subsecretario de Educación Media Superior
Dr. Rodolfo Tuirán

Directora General del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP)
Mtra. Candita Victoria Gil Jiménez

Gobernador Constitucional del Estado de Michoacán
Lic. Silvano Aureoles Conejo

Secretaria de Educación en el Estado de Michoacán
Mtro. Alberto Frutis Solís

Directora General del Colegio de Educación Profesional Técnica en el Estado (CONALEPMICH)
Lic. Minerva Bautista Gómez

Coordinador General de la Unidad de Seguimiento
Ing. Inés Barrios Díaz

Directores de área

Dirección Académica
M.C. Fernando Medina Pérez

Dirección de Enlace Jurídico
Lic. Luz María del Rosario Pinta

Dirección de Promoción y Vinculación
Lic. Gueilon Arteaga Sánchez

Dirección Administrativa
C.P. Simón López Páramo

Dirección de Planeación
Lic. Luz Adriana Pantoja Cordero

Dirección de Informática
Lic. Filo Enrique Borjas García

PRESENTA:

Pensamiento matemático

Elemental

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán

Ochoa H. E., Zamudio H. N., Borjas G. F.E., Ochoa B. R., et al. (2017) ***Pensamiento matemático: elemental***. Morelia: CONALEP-CIE

Título original de la obra:

Tzintzuntzán No. 173 Col. Matamoros C.P. 58240, Edificio E planta alta Morelia, Michoacán. México. MX

Teléfono (443) 3-14-28-09

Email: eohqfb@yahoo.com.mx

ISBN: 978-607-8416-13-4

Programa: Profesor escritor.

ISBN: 978-607-8416-12-7

Contenido

Prólogo

¿Cuántos años tienes? Desde muy niños la respuesta a esta interrogación es nuestra responsabilidad. De he hecho responder a nuestro peso, años de escolaridad, estatura, distancia de nuestro hogar a la escuela, cantidad de hermanos, la hora de algún evento en el tiempo, son filtradas por números. Nuestra experiencia en el día a día, puede ser indicada solo si se sabe la noción de número. Nuestra biología nos dotó de los axiomas, que la cultura humana requiere en probabilidad para tomar estimaciones en nuestras decisiones; representar cantidades materiales; ubicarnos en un espacio geométrico; procesar inteligentemente con la lógica razones necesarias para ponernos de acuerdo. Sin embargo, este notable pensamiento matemático es un desarrollo multicultural, un edificio de conocimientos cuyos cimientos para crear nuevos objetos matemáticos pasa por una arquitectura basada a partir de axiomas y seguida por una construcción hipotético deductiva que, además, requiere ser demostrada sin contradicción en sus piezas.

Los números y otras representaciones simbólicas de nociones axiomáticas del pensamiento matemático, en este mundo que aspira a mayor justicia social y reducir la desigualdad de escándalo, no es posible cumplir esta aspiración, con ausencia de esta habilidad mental. En sociedades que casi son anuméricas en la precisión verbal, técnica y simbólica para trasformar radicalmente las condiciones humanas para el progreso ético común; la investigación científica argumenta que es un imposible de un modo, descuidado en la educación que no convence formar el pensamiento matemático elemental.

La matemática elemental, es un concepto que evoluciona e incorpora más y más pensamiento matemático conforme la sociedad se hace más compleja y convive con mayores incertidumbres en sus condiciones de éxito. En este libro, se exploran las condiciones en la relación docente-estudiante que más favorece el desarrollo del pensamiento matemático. Se delimita el espacio de contenido de la matemática elemental y se hace énfasis en el rol de la habilidad técnica necesaria para nuestro tiempo. Destacamos que la soberanía técnica de nuestra sociedad depende del pensamiento matemático aplicado a soluciones de problemas de corte tecnológico.

Para mayor claridad terminológica, se genera un discurso que se estima será acompañado por el docente para discutir y precisar el lenguaje formal de las matemáticas. La pedagogía que se asume es proceptual-simbólica antes que axiomática-formal.

A pesar de lo que una vez pensamos por error, ahora la ciencia del pensamiento matemático y la biología del cerebro, nos hacen ver que los números son junto a otros conceptos elementales, algo que viene a las personas como abstracciones naturales y de una forma nativa cultural heredamos los miedos, vértigos y malas justificaciones para decirnos ser malos para las matemáticas. Reconocemos en los Mayas, Purépechas y las culturas prehispánicas una herencia de orgullo en su conocimiento de la geometría representada en su arquitectura exquisita y en sus calendarios precisos para el registro de eventos astronómicos y la planeación de su agricultura que domesticó al maíz.

¿El arquitecto del universo fue un matemático?

El pensamiento abstracto es similar al cómo se conciben los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos es lo que "es acción" dentro del universo matemático, por ejemplo, el concepto de número está íntimamente ligado a las operaciones aritméticas de adición y multiplicación. Las palabras encapsulan ideas, es decir, su semántica, del mismo modo, los símbolos matemáticos encapsulan proceptuales o ideas abstractas sobre el objeto matemático asociado. El significado de una oración es su propio método de verificación gramatical. Entonces, el objeto matemático más elemental es la base axiomática de las nociones de cantidad, probabilidad, espacio geométrico y la lógica. Pero son los números naturales 1,2,3,4,5,6,7,8,9 los más básicos objetos matemáticos, pero ellos no nos parecen un pensamiento abstracto, debido a que ellos fácilmente los relacionamos con cantidades presentes en el mundo material que nos rodea. Sin embargo, cuando la cuenta se hace más larga y nos exigimos de números más grandes, parece que esta pureza natural se desvanece. Tal vez al instante piense que los números no necesariamente son cosas materiales y sus propiedades relacionadas. Un sistema de numeración no solo es una colección de números, sino una colección de números junto con las reglas para hacer cálculos aritméticos. Si pensamos en las reglas en lugar de los números mismos, los números son las piezas de un juego, es decir, las piezas de ajedrez son a las reglas de ajedrez, como los números son a las reglas de la aritmética. Estas reglas son las leyes conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, inverso simétrico.

¿Qué son las matemáticas y que representa en la naturaleza? Las Matemáticas son un lenguaje artificial con sintaxis y semántica; son intuitivas en principio (axiomáticas) y formales en su evolución (demostraciones), al igual que la música son universales y solo traducibles en ella misma. Además, las matemáticas son las estructuras de información (ecuaciones fundamentales) que justifican las exigencias que justifican tal cómo es nuestro universo físico; las matemáticas son la herramienta básica sustantiva del arte de la técnica (ingeniería).

El presente texto, es diseñado como un libro que se trabaja en comunión entre estudiante y docente, como una forma de acercamiento al pensamiento matemático elemental. Las matemáticas están paradas sobre sus propios objetos, no necesitan nada más para justificar su desarrollo. Existen matemáticas en la mente (internalismo) e independiente de las personas, al parecer están en la propia realidad del mundo físico (externalismo).

Para los estudiantes, la manera de hacerse del pensamiento matemático, es descubriendo en la ruta de axiomas a los objetos matemáticos superiores, mediante la fuerza de la lógica y los argumentos conceptuales de los objetos y sus símbolos matemáticos. Los axiomas relacionados con la noción de cantidad, espacio geométrico y probabilidad, muestran el punto de partida del camino de aprendizaje. Axioma etimológicamente, palabra griega, significa "pensar correctamente". Los axiomas son simples y obvios, están en nuestra biología humana y en el mundo que nos rodea. Todo el universo está hecho de números (dogma pitagórico). Roger Penrose resume que la actividad científica es descubrir las estructuras de información (ecuaciones) que gobiernan todo el universo. El propio caos presente en la naturaleza, en el fondo de este hay orden del que se derivan falsas apariencias que nos engañan, hasta que las matemáticas con el poder de la lógica nos muestran una interpretación distinta a lo que nuestros instintos sensoriales nos hacen creer. Aristóteles afirmaba que las matemáticas no existen como una entidad independiente, son simples resultados creados y que comenzaron desde los axiomas. Las matemáticas se crean y no se descubren a partir de este enfoque. Aristóteles utilizó la apalabra *techne,* para referirse a la creación de las matemáticas, hoy origen del concepto tecnología o técnica. Aristoteles cuando se refiere a descubrir los axiomas, esta forma la llama *espisteme*, como base para el sentido común que describe el funcionamiento del mundo. Hoy en día a esta manera de pensar de Aristóteles se le conoce como *formalismo*. Para los griegos, su actitud matemática en la sociedad la reconocieron como un camino hacia adelante, usando el poder de la lógica como forma de gestión superior a las apariencias.

La técnica moderna es un arte matemático que exige experimentos que corroboren la teoría con la práctica. Muchos apoyan la idea de Roger Penrose, convencidos que hay una arquitectura en el diseño del universo, las matemáticas se descubren en él. Otros prefieren seguir pensando como Platón y Aristóteles sobre la esencia de las matemáticas como un oficio de creación. Pero fue Newton quien desarrolló las matemáticas modernas para describir la naturaleza, y revelar al arquitecto del universo. Para la educación de las matemáticas es preciso tomar en cuenta las dos posturas, verlas como creación y verlas como parte de la arquitectura de la realidad física.

Ahora mismo, los estudiantes de matemáticas elementales, al desarrollar a lo largo de este libro sus pensamientos, con ayuda del docente, aprenderán a confiar en la verdad matemática, porque de ello dependerá en mucho su destino como ingeniero (técnico) o científico. De no lograr esto, habrá poca esperanza de que los estudiantes cuajen en el poder matemático para crear teorías científicas y tecnológicas. Si las matemáticas son incuestionables sobre la verdad que expresan en sus demostraciones, esto las hace ideales para empresas tecnológicas y científicas. Pitágoras introduce la palabra *demostración*, con ello, geometría y aritmética de números crean la álgebra, era en ese momento una demostración de una verdad que afirma incuestionablemente algo. Aquí nace un lenguaje hecho de argumentos impecables, es decir, sin contradicción alguna en su lógica. El punto de partida del pensamiento matemático más auténtico es el axioma. Esto no está afuera de nosotros, los axiomas nos son heredados biológicamente, y nos es innato su revelación. Pretendemos que el estudiante se forme en su mente un entrenamiento de "sano juicio", es decir, con el poder de objetividad a partir de confiar en la verdad matemática.

Este libro es inspirado en dar un paso solido para que en el aula docente-estudiante realicen juntos el **pensamiento matemático**, como algo que hay que aprender a pensar y a explicarlo, rasgo de la mejor educación de calidad. Kirsti Lonka, profesora de psicología educativa en la Universidad de Helsinki y Anneli Rautiainen de la Agencia Nacional para la Educación de Finlandia refieren que para lograr el cambio al contexto de la calidad educativa, es fundamental a partir de estos dos fundamentos[1]:

> 1) "En la vida real nuestro cerebro no está dividido en disciplinas o materias escolares; pensamos de manera muy holística". Es decir, la realidad compleja, caótica y de alta incertidumbre como la sociedad de hoy, se comporta muy distinta a la suma de las partes[2]: modelo holístico. En este sentido, el desempeño académico evaluado por PISA intenta alcanzar estándares holísticos, pero, muchos de los sistemas educativos están en el error de ver a las materias o módulos curriculares, como si fueran partes del todo necesario para el éxito de la calidad educativa. Unos dicen que el pensamiento matemático debe ser confinado a las materias de matemáticas, así como la lectura y la escritura solo a las materias de español. Es obvio que este error es fundamental para dar cuenta del bajo desempeño de México en términos de calidad educativa.
>
> 2) "Es un gran error hacerle creer a los niños que el mundo es sencillo (no complejo) y que si aprenden cierta información los estarán dejando listos para encararlo". La alternativa más consolidada, es la escritura creativa, es el medio valuarte de un paradigma de aprendizaje no basado en resultados, sino en las **capacidades de pensar y entender** en el marco de ganar soberanía intelectual[3]. La gestión humanista es el nuevo paradigma económico, donde la dignidad es resultado de integrar prescripciones morales a la economía y la búsqueda de soberanía intelectual de los ciudadanos para un

progreso ético[4], las matemáticas son el indicador por excelencia de esta soberanía intelectual.

Los profesores requieren para la enseñanza moderna de las matemáticas un texto más amplio y en particular apoyado por asistentes virtuales Web. Para satisfacer está necesidad, hemos construido una ruta de lecciones para discusión conjunta entre docente-estudiante, apoyados preferentemente por tecnología intuitiva como la Wolfram Alpha. Mientras las aulas de las naciones con mejor desempeño académico de la OCDE cuentan con recursos tecnológicos y de contenido para la enseñanza del pensamiento matemático, aquí en México nos damos cuenta que la tecnología de cómputo y telecomunicaciones no está equipada de una propuesta pedagógica, de modo que la hagamos útil para el aprendizaje, integrando materiales originales, concretos y prácticos para el empleo de la tecnología como exploradora de las matemáticas. Nuestro objetivo es tejer una secuencia de aprendizajes y adoptar el cambio tecnológico en apoyo a las matemáticas. Este texto es un esfuerzo por apoyar una didáctica basada en el aprendizaje de pensar y explicar. No pretendemos enseñar todo sobre la enseñanza de la matemática elemental, el enfoque para el bachillerato tecnológico es basado en reconocer la importancia de este tipo de pensamiento para la aplicación práctica, al mismo tiempo que se reconozca en discusiones sistémicas entre docente-estudiante, un lenguaje propio de la naturaleza de los objetos matemáticos. El objetivo es un imperativo moral, pretendemos que los estudiantes discutan sobre el pensamiento matemático y empleen tecnologías que mejoren su aprendizaje.

Este texto está en el marco internacional de las matemáticas elementales, apoyado en referencias documentales que prueban que en ningún momento son aspectos de competencia universitaria. Hemos preferido emplear un lenguaje formal, invitando a docente y estudiante a investigar juntos cada palabra o símbolo presentes en la discusión temática que conviertan en un desafío su semántica. Se hace énfasis en pensar antes que dominar reglas mecánicas para resolver ejercicios. Este texto en particular apoya al docente para un cambio de paradigma, el centrado en el pensamiento matemático. Los estudiantes reconocerán en este texto una forma muy distinta de mirar a los números, el álgebra, la estadística, y al apoyarse en materiales y laboratorios virtuales en línea, podrán ir más lejos en sus habilidades intelectuales autónomas.

En la dimensión tecnológica, el conocimiento es hacer de las diferentes aplicaciones un cambio muy rápido en el paradigma educativo. Una persona con buen conocimiento tecnológico es capaz:

> Aplica ampliamente en su vida cotidiana las herramientas tecnológicas, y en el trabajo, reconoce cuando podrá ser útil para ayudar en logro de metas para adaptarse continuamente a los cambios en las nuevas formas de comunicar, calcular, investigar, justificar, demostrar, …

Posee conocimiento del contenido, sabe sobre el tema enseñado o aprendido, incluye el conocimiento de conceptos, teorías, ideas, evidencias, logros clave en la historia, demostraciones, construcciones de objetos abstractos. El delimitar que conocimiento es de matemáticas elementales, paso por la premisa de aquel necesario para que un ciudadano sea soberano para desenvolverse dignamente en la vida moderna. La American Council on Education (ACE), nos dice que para una buena enseñanza de matemáticas en jóvenes de bachillerato[5], es preciso cruzar un poco, asomar la curiosidad al terreno universitario. En estudios científicos se ha corroborado que docentes que discuten las matemáticas, forman la base proceptual necesaria para que los estudiantes se hagan del lenguaje y las formas del pensamiento matemático[6].

Para la pedagogía del cómo formar el pensamiento matemático, hemos asumido lecciones sobre discusiones, métodos y procesos basados en la interacción docente-estudiante mediada por un texto. El contenido de este libro desafía el entendimiento clásico de ejercicios y más ejercicios, en particular se plantean los problemas a que se enfrentaron los matemáticos desde la antigüedad, para desarrollar la matemática elemental, la importancia de ciertos avances y el conocimiento hecho de un lenguaje riguroso e intuitivo, para reconocer las conexiones de los diferentes objetos matemáticos con su base axiomática.

Los jóvenes bachiller antes de llegar a la escuela, en sus mentes hay la idea de número, espacio, probabilidad,…, el docente deberá indagar sobre estas ideas, justo antes de comenzar a leer cada lección. Por ejemplo los conceptos de número y operaciones numéricas pueden ser entendidos a través de su red de conexiones cognitivas entre experiencias, símbolos, lenguaje e imágenes. Esto ayudará a los estudiantes a construir su propio pensamiento, encadenando proceptuales e inferencias en la rica arquitectura de los objetos matemáticos. Asimilar nuevas ideas, requiere partir de las que están en la mente del estudiante, para dar cabida a nuevas experiencias[7]. El pensamiento matemático es reconocido por investigadores como parte esencial de la construcción de la persona, entre más significados matemáticos, su desempeño social lo conduce a una comprensión más objetiva y a participar más rigurosamente de los problemas que exigen mayor desarrollo matemático en ellos[8].

Los que prefieren los ejercicios matemáticos como forma de aprendizaje del pensamiento matemático, podrían argumentar que contar y entender el número está en el corazón del pensamiento matemático, y por ello es probable que en la escuela se realicen sesiones de prácticas para ello. También es importante reconocer que esta manera deja fuera el poder reconocer la naturaleza del pensamiento matemático, es decir, su fondo de experiencia humana, incluyendo la habilidad de ser capaz de clasificar, categorizar y distinguir las propiedades de los objetos matemáticos: su abstracción[9]; al provocar una idea mecánica de las matemáticas, el estudiante por lo común, jámas describe ningún marco conceptual para los objetos matemáticos.

Un marco conceptual, es un mapa de las conexiones y trayectorias de las relaciones entre los objetos matemáticos. Este marco describe las maneras de pensar a un objeto matemático. El aprendizaje por discusión entre docente y estudiante, proporciona el entendimiento para explicar la no contradicción del pensamiento matemático, y justificar la necesidad de avanzar en estas áreas del aprendizaje abstracto. Por lo tanto, las lecciones son un camino o un mapa para el seguimiento individual y grupal de las discusiones. Discutir es la actividad racional de aportar ideas socializando para su socializado, donde el fin es alcanzar mayores virtudes en el pensamiento de los participantes. Esta forma de producir experiencia sobre el pensamiento matemático es muy empleada desde la primaria en sociedades desarrolladas[10].

Referencias

[1] Penny (2017) ¿Como le está yendo a Finlandia con el "phenomenon learning", el nuevo modelo de enseñanza del mejor sistema educativo del mundo?. BBC Recuperado de : http://www.bbc.com/mundo/noticias-internacional-40108708

[2] Mitchell, M. (2011). *Complexity: A Guided Tour* (1 ed.). Oxford University Press.

[3] Havnes Anton (2016) Why use learning outcomes in higher education? Exploring the grounds for academic resistance and reclaiming the value of unexpected learning. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 28(3):205-223.

[4] Dierksmeier, Claus (2016) What is 'Humanistic' About Humanistic Management?. Humanistic Management Journal, 1(1):9-32. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s41463-016-0002-6?wt_mc=Other.Other.2.CON417ctw_2017_a56

[5] American Council on Education (ACE). URL: http://www.acenet.edu/Pages/default.aspx

[6] Rowland, T.; Turner, F.; Thwaites, A. & Huckstep, P. (2010) Developing primary methematics teaching. London:Sage.

[7] Von Glasersfeld E. 1995. *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Studies in Mathematics Education Series: 6.* ERIC.

[8] Simon M.A. 1995. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education* 114-145.

[9] Cotton T. 2016. *Understanding and teaching primary mathematics*. Routledge.

[10] NSW Department of Education https://education.nsw.gov.au/curriculum/mathematics

Idea eje: el pensamiento matemático

Contexto

David Martín de Diego, vicepresidente de la Real Sociedad de Matemáticas e investigador del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) responde a la pregunta ¿Hasta qué punto las matemá ticas están presentes en nuestras vidas?

> “Simplemente las vemos al pagar la compra o en el porcentaje de calorías del desayuno, ¿o hay más matemáticas rodeándonos, ocultas a los ojos desentrenados? Las matemáticas están muy presentes en todos los ámbitos. Hay estudios que se han realizado en países como Inglaterra y que están demostrando que el impacto que tienen es muy importante en el PIB. Las matemáticas se están utilizando en finanzas, farmacología, ingeniería aeronáutica… Son matemáticas que hay que realizar, que hay que explorar. Un país que quiera ser desarrollado y tener un buen futuro necesita muchos matemáticos, y científicos en general”[1].

Se dispone ahora de la evidencia de una amplia gama de investigaciones, que demuestran que la adaptación individual de los humanos utiliza las habilidades cognitivas existentes para compartir y transmitir los avances a través de la colaboración social[2]. No es simplemente una cuestión de aprender a copiar la actividad de otras personas, sino las maneras en que otros piensan, es decir, compartir cómo crear conocimientos, de esta manera, acumular socialmente los modos de crear conocimientos es indispensables para el desarrollo.

> El último informe de PISA en profundidad sobre las matemáticas, señala la importancia de mejorar su enseñanza como algo fundamental para conseguir mayor movilidad social. Según la OCDE, en *Ecuaciones y Desigualdades*: haciendo las matemáticas accesibles a todos los individuos, aquellos que manejan mejor los números, tienen un empleo mejor pagado y disfrutan de mejor salud. Ahora mismo, según lo estudiado por los analistas en educación de PISA, la manera en la que se enseña hoy matemáticas está profundizando en la desigualdad educativa por lo que califica los hallazgos de "decepcionantes". Pero, el vaso medio lleno es pensar que una buena calidad en la enseñanza de las matemáticas

> puede hacer mucho por solucionar las desigualdades sociales. "Todos los estudiantes necesitarán las matemáticas en su vida adulta. Reducir las desigualdades en el acceso al mejor contenido de las matemáticas es una herramienta para aumentar la movilidad social", concluye el informe[3].

Avanzar en el pensamiento matemático de los ciudadanos sin duda genera la pregunta, ¿cómo hacer pasos importantes en la educación de nuestros estudiantes cuando estos ni siquiera dominan las operaciones con fracciones?. Por supuesto que esto lo tenemos en cuenta, muchos tratan de inculcar por la fuerza mecánica una aparente competencia simbólica, pero en realidad sin semántica solida asociada a los símbolos, este error se suma al hecho denunciado por la UNESCO en Corea 2015: "El apagón pedagógico". Donde la declaración del Foro Mundial sobre la Educación, asegura que "hemos perdido la capacidad de analizar pedagógicamente los problemas dentro de las comunidades académicas y dentro de la escuela. Hoy el docente ha sido casi obligado a transmitir lo que otros producen y ha no producir su propio conocimiento. Esto es una crisis que reduce al docente a un instrumento y deja de ser un agente creativo"[4]. Es decir, un docente que crea sus propuestas de contenido, es un agente que fortalece la soberanía intelectual de su sociedad. Algunos nos sorprende y causa tristeza, que muchos no encuentren a las matemáticas en la realidad moderna, parece que hay ceguera, coincidimos con que la causa más clara de esto es el Apagón Pedagógico, sí, esa mala actitud de hacer instrumento lo que debiera ser creatividad virtuosa.

Las matemáticas sin duda participan en la exploración del universo, de sus átomos, en la música, en la construcción de grandes ciudades, en la tecnología digital, en la medicina, es decir, están en todo el desarrollo de la civilización. Explorar de este modo, es la búsqueda de patrones geométricos, numéricos y la determinación de las ecuaciones que gobiernan al universo. Pero es la guerra la que en el siglo veinte impuso las matemáticas al grado estratégico de desarrollo de las sociedades. Pero recientemente los avances científicos y tecnológicos de principios de este siglo XXI, le dan a las matemáticas un lugar propio y clave para la soberanía intelectual de la sociedad moderna. Las matemáticas están en las flores, los insectos, las partículas subatómicas, predicciones de clima, pero sobre todo están como capital intelectual del arte, la ciencia, la tecnología, la literatura, es por ello, que nosotros aquí, las abordamos desde la óptica de un viaje de exploración.

Pedagógica proceptual-simbólico

Aquí, presentamos el paradigma pedagógico propuesto para aprender el pensamiento matemático. De acuerdo con la investigación científica en el marco del campo de la educación matemática, en particular desde el punto de vista de la experiencia. Esta educación de las matemáticas *proceptual-simbólico* despliega un énfasis en el desarrollo cognitivo basado en marcos de imágenes conceptuales y sobre esquemas formalmente definidos. El concepto intuitivo, es el que contiene la imagen mental del objeto matemático, propiedades asociadas, procesos y elementos estructurales[5]. En concreto la idea destacable en este paradigma, es la de una imagen conceptual contenida en todo símbolo de notación matemática, el aprendiz registra mentalmente los significativos estructurales en una forma de desafío auto reconstruible. Este modelo asume la abstracción reflexiva aportada por Piaget[6], la cual consiste en dos mundos: proceptual-simbólico y formal-axiomático.

El pensamiento matemático aplica a los conceptos percibidos por los sentidos, construimos concepciones mentales mediante el uso de las percepciones físicas. En el mundo proceptual, las acciones sobre las concepciones mentales se encapsulan mediante el uso de símbolos. En este sentido, el término *Proceptual* destaca la existencia de una confrontación de razones entre el proceso y el concepto evocado por el mismo símbolo, tanto en un proceso o en el concepto producido por este proceso. La transición al mundo formal, requiere primero a los proceptuales, antes que las definiciones a través del pensamiento formal o pensamiento natural[7]. Este modelo pedagógico *proceptual-simbólico*, combinado con la pedagogía avatar (discurso narrativo de una experiencia de aprendizaje), es más flexible ya que no hace hincapié en la importancia particular en el orden de los aprendizajes, sino en el orden mental del proceso de pensamiento presentado como un flujo discursivo narrativo.

Este marco educativo avatar se utiliza para formular el crecimiento de las ideas, por ejemplo en el cálculo infinito decimal desde dos ideas significativas: el proceso finito de cambio de la aritmética a el álgebra dentro del concepto de límite potencialmente infinito. Este cambio de los experimentos mentales del cálculo simbólico, es determinante para las definiciones y pruebas de soluciones de cálculo que los aprendices serán capaces de realizar.

Currículo a desarrollar

El siguiente universo de términos sintetiza el espacio de desafío desde donde proyectamos al pensamiento matemático, es decir, los experimentos mentales necesarios para que el mundo platónico se aprenda a partir de un discurso que contempla el capsular los pensamientos en forma simbólica y compartir el cómo se crea conocimientos dentro de las matemáticas.

- Verdad matemática
- Existencia matemática
- Objeto matemático
- Axioma
- Álgebra
- Número
- Geometría
- Proposición
- Operador
- Demostración
- Calcular
- Idea matemática
- Postulado
- Teorema
- Modelo matemático
- Estructura matemática
- Argumento impecable
- Tautología
- Infinito
- Finito
- Cero
- Función
- Ecuación
- Conjunto

Algunas de las investigaciones relacionadas con el diseño de tareas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas utilizan los principios fundamentales de la **noción de situación**, que se define como el modelo ideal del sistema de relaciones entre los estudiantes, un maestro y un medio de conocimiento matemático. El proceso de aprendizaje se pone de relieve a través de las interacciones que tienen lugar dentro de un sistema de este tipo. En esta situación, el trabajo de los estudiantes se basa en varios niveles con un enfoque principal en la acción, en la formulación a través de la construcción de un lenguaje apropiado y en la validación utilizando un cuerpo coherente de conocimientos[8]. El trabajo de los estudiantes crece durante las fases de acción, formulación y validación de la optimización de las interacciones de referencia de coherencia con los compañeros y el profesor. También utilizan para estudiar los libros de análisis regulares, de manera que las interacciones que tienen que colocar dentro del sistema formado por el profesor, los estudiantes y el ambiente, es gobernado por el contrato didáctico real y evoluciona de acuerdo a su naturaleza de desafío.

Para crear un modelo de actividad didáctico, se utiliza la noción de praxeología, que es una manera formada de dos bloques: **lo teórico y lo práctico**. El bloque práctico contiene tipos de tareas y técnicas para la solución de tareas. Las técnicas (es decir, los discursos que justifican los procesos usados) y la teoría que los justifican dan estructura a los componentes del bloque praxeologico. Al modelar las actividades matemáticas relacionadas con conceptos en praxeologías matemáticas, los investigadores sugieren que se aprende más deprisa de este modo, cuando se recibe asistencia del profesor o apoyo desde un laboratorio digital[9].

Otros investigadores utilizan el modelo COF por sus siglas en inglés "Commognitive Framework of Sfard", para analizar el discurso de los estudiantes y el discurso de los profesores, así como la comunicación matemática entre éstos. El fundamento básico del COF es que "el aprendizaje de las matemáticas es la iniciación en los discursos en la matemática que implican cambios semánticos sustanciales para los estudiantes y en la enseñanza de matemática implica la facilitación de estos cambios"[10]. El discurso matemático se puede especificar en función de palabras que se usan; mediadores visuales; narrativas y rutinas tales como la definición, conjeturas que surgen en las demostraciones. El discurso tal como la producción de la demostración, es el que se da a través de pasos deductivos para asegurar llegar a ser objetivos en una narrativa; se llama justificación a este proceso de discurso. En el COF, la comunicación matemática implica transiciones continuas de significantes (palabras o símbolos que funcionan como sustantivos), que es un proceptual accesible para que toda narración refrendada por el significante, pueda implicar a los axiomas en el fondo de toda semántica conjuntada dentro de un símbolo matemático.

En resumen, se propone aprender matemáticas desde un orden proceptual-simbólico mediado por un avatar, es decir, una narrativa que implica a las justificaciones que dan coherencia al discurso matemático. Cada nuevo aprendizaje matemático puede comenzar por cualquier lado, lo importante son los objetos matemáticos que involucre, que el estudiante desarrolle sus ideas intuitivas y las observe dentro de una estructura mayor a la que se aspira aprender, para más tarde dar paso a esa cadena de deducciones que den formalidad al discurso de los aprendices. La interacción dialógica entre profesor y estudiante, es el proceso de refinamiento de los proceptuales. Y es en la práctica donde se hace firme la sintaxis simbólica de la notación matemática. En otras palabras, desarrollar todo pensamiento matemático, es por un lado construir la intuición de los significantes implicados en los objetos matemáticos de las estructuras complejas, tales como lo que es un álgebra, una función, etc.

La educación técnica

El discurso del pensamiento técnico.

El discurso en la técnica nos dice, solo lo que se construye con conceptos y pruebas técnicas se puede y se sabe qué es. Es la actividad de pensamiento que se basa en reconstrucción y aplicación de estructuras ontológicas (modelos matemáticos de abstracción), técnicas e instrumentación. Al pensar se logra conocimiento, si esta actividad alcanza a reconstruir el objeto real o ideal en modo sintético, y además, evalúa su dominio efectivo en la realidad conocida y cognoscible. Lo dado para ingeniería, es lo técnico, es la afirmación de que los conceptos nacen de la experiencia proceptual en un irresuelto de contradicciones de términos en lo cognoscible. Esta dominancia de lo práctico, demuestra que la aplicación tecnológica consiste en la finalidad material de la experiencia, bajo el juicio de influencia de una razón práctica generadora de ideas. El creativo de la razón práctica (estudiante) necesita como agente moral la espontaneidad de autonomía, para explorar subordinando la epistemología al propósito del arte técnico. De este modo el pensar técnico es realmente un estado existente de cosas, una visión analítica normativa del espacio de razones de lo eficaz en el mundo material.

Pensamiento técnico es el espacio creativo de los propósitos como consecuencia de la educación en la exploración racional de la realidad material, cuya ética dominante son los fines de la construcción material de la civilización. La educación técnica describe el máxime de los propósitos humanos a modo de objetos de representación de una nueva plataforma de creatividad técnica sobre lo real. Esto tiene sentido si sus aprendices formulan construcciones racionales sobre objetos prácticos, cuyos conceptos organizados analíticamente como sistemas (modelos matemáticos), son reclamados como suyos a través de la reconstrucción práctica eficaz dentro de talleres y laboratorios. Así que las matemáticas son respecto del pensamiento un cumplimiento del éxito de los propósitos de la aplicación técnica. No es una suerte nombrar a algo de un modo distinto para que sea innovador, sino es una cuestión de nuevos actos de interacción que no agotan el tipo de operación con lo que lo rodea.

¿La realidad es acaso una ilusión por consenso y nada más que eso?, ¿quiénes somos en el lugar que guardamos en el universo?, ¿acaso somos la estructura de información ontológica que da disposición a cada átomo de nuestro cuerpo? o más allá de las ecuaciones ontológicas, ¿somos lo que pensamos, deseamos o inventamos distinto al orden de la realidad material dada? Nuestra existencia, al parecer en el acto de pensarla, es el paso de una mónada a otra en otro nivel de realidad, donde cada paso nos conduce más cerca de la nada o del infinito, en otras palabras, pensar la existencia es una aproximación infinita de existenciales ontológicos hipotéticos deductivos. Es decir, lo que para uno existe es producto de la experiencia de lo cognoscible por nuestra mente biológica, así que mediciones, reflexiones y razones crean y reclaman hacer coherente todo existencial como un sistema enunciado en lo real por las matemáticas. La mente es biológica, por esta razón pensamos, ¡el universo no existe!, lo que existe es lo que la matemática ontológica determinista y de probabilidad permiten en términos de coherencia en sentido estricto, ser racional sin contradicción ontológica para nuestra especie. Lo dicho aquí, es el fundamento del por qué la educación técnica debe ofrecer a su sociedad una plataforma tecnológica en sus aulas, laboratorios y talleres que potencien en la mente de los estudiantes, conceptos técnicos justificados objetivamente en su eficacia sistemática material.

El deslumbramiento de lo técnico, es un consenso de pensamiento y observación científica, lo real técnico, es una propuesta de hipótesis deductiva de la teoría del universo aprendida por una educación técnica. Dicho de otro modo, el discurso de una civilización es el estado de cosas que inventan a la realidad material, determinado por la dinámica de sus individuos en cognición para adoptar soberanamente conocimiento técnico. La literatura técnica y las tecnologías todas ellas, son las que inventan la capacidad de una sociedad para ser soberanía intelectual a favor de su desarrollo.

“La imaginación es más importante que el conocimiento. El conocimiento se limita a todo lo que sabemos y entendemos ahora, mientras que la imaginación abarca el mundo entero, y todo lo que podrá conocerse y comprender”[11]. El propio Albert Einstein es quien pone en perspectiva el conocimiento y la actividad esencial de una mente técnica. En la mayoría de la educación técnica la práctica educativa se centra en representación constructivista en proceso de descodificación que han atribuido a representaciones científicas e ilustradas como explicaciones, y no como discusión rigurosa de fundamentos. En consecuencia para la educación técnica, debemos distinguir su complejidad en su tradición de producir un discurso objetivo, probado en eficacia tecnológica. La técnica es una educación basada en representaciones científicas de artefactos, símbolos o modelos característicos ideales en el sentido práctico. Es evidente el contraste entre la formación científica y la técnica, quizás la diferencia más relevante sea que la primera es una práctica de formación de valores epistémicos objetivos basados en la investigación científica, y la segunda, es formada en la habilidad técnica de procesos y modelos prácticos ilustrados por conocimiento construido en la ciencia[12]. A la técnica le interesa la eficacia en la realidad y a la ciencia le interesa la verdad como discurso objetivo validado en la propia realidad.

La técnica es, en un sentido más general, la idea convertida en una realidad de creación y uso de herramientas para realizar tareas o cumplir propósitos en el mundo técnico. La palabra técnico deriva de ingeniero de su raíz latina *ingeniarius* que significa alguien ingenioso en la solución de problemas. Es el producto social de la capacidad del hombre para hacer herramientas, que más tarde serán herramientas de nuevas herramientas para de esta manera progresar en el desarrollo tecnológico de nuevas plataformas creativas. La ingeniería moderna oculta en sus obras, haciendo ininteligible a la inspección directa la lógica de sus dispositivos, para ello, se práctica la ingeniería inversa, para tratar de revelar tales secretos. Cada vez se da una mayor comunicación entre la ciencia, la ingeniería y las matemáticas, sin embargo, mantienen independencia en su seno, es decir, son irreductibles entre ellas. Es urgente reflexionar que la formación técnica ofrece al futuro soluciones de viabilidad creativa para hacer sustentable el desarrollo social, sin embargo, por falta de equipamiento de talleres y laboratorios no aportan la plataforma técnica creativa para muchos de estos fines, ello es cancelar un futuro mejor.

> "En lugar de intentar revisar los tratados comerciales los gobiernos deberían centrarse en preparar a la mano de obra para un futuro que requerirá habilidades más avanzadas y una mayor formación tecnológica. Todo lo demás son distracciones".
>
> James Pethokoukis (American Enterprise Institute)

La búsqueda de autonomía en el aprendizaje

Ayudar al estudiante, una tarea importante del profesor, es ayudar a salir de vías muertas a los estudiantes que intentan desplegar su conciencia sobre algún aspecto de las matemáticas. Esta tarea no es fácil; requiere tiempo, práctica, dedicación y principios sólidos sobre lo que se explica. Desde luego que lo deseable es que el estudiante adquiera la mayor experiencia de trabajo independiente. Pero si él no está solo con su problema y recibe la ayuda suficiente, pude hacer progresos más acelerados. El profesor debe ayudar, pero no demasiado, ni muy poco, este equilibrio tiene como fin que la participación del estudiante sea razonable en cuanto a esfuerzo autodidacta, para que adquiera responsabilidad (madurez), para su propio compromiso con su aprendizaje.

Si el estudiante muestra no ser capaz de hacer mucho por sí mismo, el profesor debe asignarle por lo menos en algún principio trabajo independiente de menor complejidad. Ayudar al estudiante de una manera discreta, en la que éste despierte su determinación por aprender. El profesor cuando asesora el aprendizaje, lo hace poniéndose en el lugar del estudiante, para tratar de comprender lo que está sucediendo en la razón y las emociones del aprendiz. Se puede orientar induciendo preguntas, recomendaciones y entrenamiento de operaciones mentales; tratando de ayudar al estudiante a seguir los pasos que un profesor como experto del camino andado, sugiriéndole en función de su propia experiencia. De este modo el aprendiz realizará innumerables preguntas como ¿qué se requiere?, ¿qué queremos encontrar?, ¿qué se supone buscar? El objetivo de estas preguntas es enfocar la atención del estudiante sobre lo desconocido. A veces, se obtiene más efecto con sugerencias reflexivas que con tareas obligatorias, de este modo, sugerencias y preguntas apuntan al mismo efecto; tienden a provocar operaciones mentales de juicio y reflexión.

Un instrumento útil en el texto académico generado por los profesores, es el de guiar un discurso de explicación a través de recoger información de preguntas y generar sugerencias, mismas que son normalmente útiles para discutir problemas con estudiantes. Las preguntas clásicas que se suelen aplicar en el flujo del discurso didáctico en la educación de las matemáticas son: **¿qué es lo desconocido?, ¿cuáles son las variables?, ¿qué objetos matemáticos están implicados?, ¿qué métodos de solución a estos problemas se han desarrollado?** Este orden de preguntas no está restringido a temas particulares, su empleo como estructurales del contenido académico puede ser empleado en problemas de naturaleza algebraica, geométrica, o dentro de problemas de carácter práctico. Estas preguntas no se aplican a contenidos en temas de demostración, para tales casos el matemático inventará sus propias preguntas, esas que hacen de las matemáticas un arte de soluciones.

Las preguntas listadas para el orden didáctico de un aprendizaje proceptual-simbólico, son sugeridas por el sentido común, son naturales, simples, obvias y proceden de la historia de las propias matemáticas en su camino por ser parte integral de la formación de hombres racionalmente competentes. **La primera** refiere a buscar en lo desconocido y tratar de razonar un problema que exige en segundo lugar identificar las variables. Es como quien tiene hambre, y en automático piensa en comida y las formas de hacerse de ella. Por ejemplo, sí Usted tiene un problema de construir un triángulo, desea encontrar las variables implicadas que resuelvan lo desconocido y enseguida encontrar la naturaleza del objeto implicado y los métodos desarrollados para tales problemas.

Las preguntas listadas como vehículo estructurado del discurso didáctico que gestiona el pensamiento matemático, sugieren una cierta conducta de toda persona preocupada por problemas matemáticos. Pero, hay una motivación primaria, la persona debe estar interesada en los problemas matemáticos antes de caminar dentro de este conocimiento objetivo y abstracto, es decir, dentro del pensamiento exacto y puro. El interés del profesor por las matemáticas es captado por el estudiante, primero advierte sin este último, su voluntad para crear caminos que expliquen la naturaleza particular de los objetos matemáticos implicados en los problemas referidos, en **segundo** lugar, realiza la construcción intuitiva de la semántica que implica a estos objetos, y en **tercer** lugar, desarrolla la capacidad del estudiante para que él pueda resolver por sí mismo problemas relacionados con los objetos matemáticos implicados.

Nuestra experiencia demuestra que estas preguntas sugeridas ayudan al estudiante a entrenar su cerebro en el espacio del pensamiento matemático. Estas preguntas parten del sentido de lo evidente y dan pasos de aproximación general sobre los objetos matemáticos implicados, para después discutir las generalidades y dejar el paso libre al estudiante para que este pueda en autonomía desarrollar pensamiento y habilidad matemática. Pero estos dos objetivos están estrechamente conectados; si el estudiante por cuenta propia resuelve problemas, añade poco a poco capacidad para resolver problemas, y su eficacia le motiva. Entonces, no debemos olvidar que nuestras preguntas son generales y aplicables a muchos casos. Si varias veces, estas preguntas están implícitas en cada nuevo contenido de desafío para el desarrollo del pensamiento matemático, el estudiante creará en su conciencia un flujo proceptual-simbólico correcto para gestionar por sí mismo soluciones a problemas matemáticos. Y es el estudiante el que finalmente es capaz por sí mismo de aprender a hacer estas preguntas estructuradas para gestionar su conocimiento.

¿Qué puede hacer un profesor con el fin de obtener el mejor resultado posible? Aquí sugerimos el modelo proceptual-simbólico apoyado en el modelo COF basado en un discurso narrativo para exponer el pensamiento matemático. En la tercera fase se encuentra el desafío práctico, en él, técnicas y métodos son aprendidos en procesos de entrenamiento. Resolver problemas es una habilidad práctica, generalmente la adquiriremos por imitar procesos y técnicas. Pero el pensamiento matemático antes que práctico es proceptual-simbólico, antes que se aborde cualquier problema, el profesor debe inculcar el interés por la naturaleza de estos problemas matemáticos. Si en verdad el docente desea desarrollar en sus alumnos las operaciones mentales que corresponden a las preguntas sugeridas, debe crear un discurso siguiendo este orden de ideas y hacerlo de manera natural y de este modo poco a poco ayudar al estudiante a entrenar su mente.

Gracias a esta orientación sistémica en la educación de las mentes de los estudiantes, con fundamento en los resultados de investigación científica en materia de aprendizaje de las matemáticas, confiamos en que al estudiante le importa cada vez más el hecho particular del pensamiento matemático, es decir, desde el terreno de la confianza en sí mismo y la eficacia de enfrentar problemas, se hará de la energía necesaria para escalar en nuevos y más complejos problemas matemáticos.

Cuatro actitudes del aprendiz frente al pensamiento matemático:

- Al tratar de encontrar la solución, debemos cambiar nuestros puntos de vista, es decir, variar la forma de ver al problema. Primero tenemos que entender el problema; tenemos que ver claramente lo que requiere.

- Estudiar la idea comprimida en los símbolos de la notación matemática. Tenemos que ver cómo están conectados los diferentes objetos matemáticos, y como lo desconocido se relaciona con las variables, con el fin de obtener la idea de la solución.

- Hacer progresos mediante la práctica de cálculo, la demostración y ejercicios ilustrativos. Hacer un plan de ejercicios.

- Miramos hacia atrás la solución completa, la revisamos y discutimos si fue ese el camino más elegante.

Cada una de estas actitudes tiene su importancia. Puede ocurrir que un estudiante nunca llegue a una idea brillante de solución por un camino elegante y deseable, porque es desafortunado el efecto producto de la fuerza mecánica de muchos ejercicios. Si bien tiene una solución, no se quedó con lo mejor de las matemáticas, que es la forma en que este pensamiento crea el conocimiento. Algunas de las mejores actitudes de una persona capaz de pensar en términos matemáticos puede perderse, y con ello, la sociedad pierde soberanía creativa en su intelecto colectivo.

Entender el problema, es lo más sano, hay quienes cometen el error de trabajar en la solución de algo que no se ha planteado su desafío, cuando esto ocurre el estudiante desvalora el arte presente en toda solución matemática. Esto debe advertirlo el docente, el deseo por la solución es la energía de interés que permite mantener atento al estudiante durante mucho tiempo. Debe entenderse la declaración verbal del problema, para ello el docente comprobará si el estudiante es capaz de indicar lo desconocido, las variables y datos, las condiciones y los objetos matemáticos implicados, justo antes de aprender técnicas y métodos de solución.

Flujo del pensamiento proceptual-simbólico

1. ¿Qué es lo desconocido?

2. ¿Cuáles son las variables?

3. ¿Qué objetos matemáticos están implicados?

4. ¿Qué métodos de solución para estos problemas se han desarrollado?

Avatar

Hola soy Binaria, les comparto que sor Juana Inés de la Cruz en una de sus liras, le dice a los que no creen en el poder de la lectura del texto escrito:

Sino se desvanece el triste acento,
como mis esperanzas, en el viento.

Óyeme con los ojos,
ya que están tan distantes los oídos,
y de ausentes enojos
en ecos, de mi pluma los gemidos;
y ya que no llega mi voz ruda,
óyeme sordo, pues me quejo muda[13].

Leer es escuchar al texto, reflexionar lo que escribimos, escribir lo que pensamos, no solo para comunicarnos, sino para tener algo qué comunicar, para ser libres y dueños de nuestra propia voz. El discurso es la forma en que mi avatar preserva la inversión del tiempo, quien sabe de educar sabe que se invierte más tiempo en preparar la clase, que en exponerlo frente a los estudiantes. Ese discurso original desde donde el docente en autonomía académica crea la realidad, describe para un lector novel una propuesta de aprendizaje.

Un lector competente de la propuesta de un profesor, recrea desde el texto imágenes racionales y estéticas que le son una experiencia que disfruta al hacerlo. Cuando profundiza en su comprensión, las propias ideas son modificadas y de este modo, el propio lector es en cada lectura una persona distinta y con mayor sensibilidad para con la sociedad, su entorno natural y sobre todo más allá de la superficie de la realidad; se adentra con la emoción de un artista, un científico, un ingeniero, es decir, como todo un gran explorador creativo es feliz. Aunque se ha reportado por todo el mundo en investigaciones el hecho de que las personas competentes en lectura eficaz son las menos, es válido y deseable tener en cuenta y buscar con demencia que sean más, dado que, tienen un mejor rendimiento escolar y profesional, poco se hace por ampliar el número de estos en la sociedad, aseguran expertos debido a que se requiere mayor esfuerzo del sistema educativo[14]. Quizás porque a quien es encomendado para hacerlo, simplemente no siente placer por leer y no reconoce la importancia de saber leer. La propia Organización para la Cooperación Económica y el Desarrollo la OCDE[15] precisa al respecto:

> "Los estudiantes que alcanzan el nivel más alto de PISA tienen una gran probabilidad de mejorar el acervo de talento de su país; son vitales en las economías basadas en el conocimiento."

Cuando un docente prepara su clase, crea un discurso y este hereda más de lo que se aprende leyendo en su construcción. Es decir, regala al lector su propia experiencia en el conocimiento.

La lectura en voz alta, esa es mi voz, Soy un avatar y me llamo Binaria.

Todos sabemos lo elemental de conversar, pero pocos desarrollamos la habilidad de la conversación didáctica, para ello es necesario escribir, dado que escribir es el modo más elegante de pensar y avanzar en la profundidad para un nuevo pensamiento. No es casualidad que la calidad de la educación sea medida con dos variables esenciales, el dominio de la lengua y la capacidad de comunicación. Si no invertimos en la formación de lectores, un país así, como consecuencia de esta debilidad en el adiestramiento en la comprensión de cuerpos de texto escrito, se desvinculará de las formas de vida de mejor calidad en el desarrollo personal y social.

Leer es una ocupación seria, cuando se está leyendo, muchos náufragos de la educación, intentan desacreditar esta actividad aludiendo a que es una forma cómoda y floja para comunicar la clase preparada, dado que la forma en voz alta que presenta información es mejor vista por la mayoría de los alumnos por requerir menos esfuerzo. En esta hipótesis del mayor esfuerzo, está presente la aspiración innegable de que en un aula en la que se lee con regularidad se descubre el placer por el conocimiento.

El gran Alfonso Reyes en su obra *La experiencia literaria*[16] *nos ilustra*:

"Sin cierto olvido de la utilidad, los libros no podrían ser apreciados".

Otro grande de las letras, el Ruso Yuri Dombrovsky en su obra *La facultad de las cosas inútiles*[17]:

En un lúcido análisis expresa "he decidido no inventar nada, describir lo que conozco mejor, mi propia vida". En esta novela se refiere a la importancia de la literatura para la civilización, aunque el régimen estalinista llamó "cosas inútiles" a la literatura, quizás porque sabía que son los libros nuestra memoria sangrante a manos del totalitarismo y los que renuevan nuestra consciencia. Desde los libros emerge a la superficie lo mejor de la humanidad.

La literatura es la que custodia los mejores ideales y valores de los individuos de todos los tiempos, y es el más seguro refugio para que la imagen social del docente se reivindique. Los cambiantes puntos de vista que consideran a los docentes una carga necesaria, podrían cambiar si se dan cuenta que son en realidad individuos que custodian lo mejor de la cultura universal desde el libro que produce y promueve.

El libro, a primera vista parece solo una aglomeración de páginas. Sin embargo, una mirada más atenta revela que es un organismo textual, bien planificado en su arquitectura y claramente estructurado. Todo se encuentra en su lugar, cada frase, palabra y párrafo, es parte de un *corpus* de texto trenzado en un flujo narrativo, desde el cual el hombre ha creado mundos enteros. Si le invitamos a explorar estos mundos desde los libros es porque en ellos, el discurso es más estructurado para los aprendices, las propias erratas en el libro, son pretextos perfectos de seguir buscando la perfección. Por estructurados nos referimos a cadenas de ideas que fundamentan, justifican y demuestran objetivamente el cómo se pensó el conocimiento, es decir, son la lógica del discurso. Cuando por lo común, una clase, solo alcanza la categoría de informar el conocimiento, el discurso literario además de informar, seduce a la razón a la emoción.

Lección 1: Pensamiento matemático

Algo esencial para aprender matemáticas, es entrenar una mente a este tipo de pensamiento. Las primeras ideas sobre algo nuevo, forman en nosotros la intuición, y esta intuición afecta cuánto disfrutaremos en el futuro de un tema. ¿Qué significa cuando queremos aprender matemáticas? Significa que hemos reconocido que para conquistar la tecnología, la naturaleza del propio universo requerimos aprender a pensar las matemáticas.

Siempre es recomendable partir de aquellos conceptos inmediatos a un objeto matemático, antes que dar la definición moderna de una demostración; que esta última, es más precisa y compleja no hay duda, pero también que su abstracción produce vértigo en el novel. Para la definición moderna es necesario antes conseguir la comprensión matemática intuitiva del objeto estudiado: de una manera proceptual-simbólico. Aquí abordaremos a la matemática desde un ángulo distinto, es como imaginar un círculo que comienza en cualquier punto alrededor de nuestra comprensión. Pero al comenzar por cualquier punto la perspectiva cambia. Por ejemplo si nos preguntamos por el círculo.

¿Cómo definir un círculo?

Desde la geometría

- La forma más simétrica posible en dos dimensiones.
- Es la forma que obtiene más área para el menor perímetro (propiedad de Isoperimetría).
- Todos los puntos de un plano equidistante de un punto dado (radio, distancia del centro a una recta tangente a cada punto del círculo).

Desde la analítica

- Los puntos (x,y) en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ (versión de la geometría analítica).
- Los puntos de la ecuación r sen(t), r cos(t) para todo t (versión analítica)
- La forma cuya tangente es siempre perpendicular al vector de posición (interpretación física)
- Polígono regular de **n** número de lados.

Podrían ser más interpretaciones, el hecho es que cada una de ellas describe la misma idea. El cómo lo aprendimos de niños, determina la esquina desde dónde lo miremos en cada nuevo aprendizaje de nuestras vidas, esa es la intuición de un conocimiento, un viaje entre conocimientos alrededor de una idea formal.

Finalmente, el conocimiento de las matemáticas es sobre ideas perfectas, formuladas en forma de notación matemática, el conocimiento matemático es una intuición clara sobre un concepto, logrado esto, las ecuaciones encajan cada una en su lugar, con coherencia y precisión.

Aprender matemáticas es:

- Encontrar el tema central de un concepto matemático.
- Expandir sus propiedades y aplicaciones.
- Explorar la relación de sus propiedades con otras áreas de la matemática.

El aprendizaje de las matemáticas, es una búsqueda de conocimiento y aplicación. Esa primera visión intuitiva puede ayudar a todo aprendiz a comenzar, son esas definiciones que hacen sentido y caminan alrededor del círculo para encontrar otras. Golpearnos la cabeza contra una idea que nos resulta abstracta no es muy divertido, para ello debemos ver desde diferentes ángulos esa idea, es decir, desde un libro a otro, de un profesor a otro, de manera que tenga sentido la idea explorada. Las matemáticas pueden llegar ha ser difíciles y desalentadoras cuando nos enfocamos a partir de definiciones avanzadas en el conocimiento, sugerimos que el punto de partida debe ser intuitivo, diverso y observado desde una mente abierta.

Pensamiento matemático aplicado

La frontera entre teoría y aplicación es muy subjetiva y cambia con el tiempo. Algo que podemos hacer es conectar a las matemáticas puras con la ciencia y la tecnología. Las matemáticas aplicadas no son un campo científico o técnico definible, pero quizás sí desde la actitud humana, puede dirigirse una idea respecto a la integridad matemática rigurosa; debe complementar al razonamiento teórico con el trabajo numérico, considerando ejemplos plausibles que sucesivamente planteen al pensamiento matemático como la acción de modelado, aquí las fases del pensamiento matemático aplicado[18]:

a. Modelado de problemas matemáticos
b. Análisis del problema matemático
c. Desarrollo de algoritmo
d. Escritura de software
e. Experimentos computacionales
f. Validación del modelo

Es decir, esencialmente, las matemáticas se convierten en aplicadas cuando se utilizan para resolver problemas del mundo real, **no buscan resolver dificultades matemáticas**. Aquí, en lugar de intentar dar nuestra definición de las matemáticas aplicadas, las hemos descrito como diversas faces, organizadas en forma de etapas, donde esta última nos conduce de retorno a la primera. Para comprender más a fondo el pensamiento matemático aplicado, ensayemos sus conceptos.

Modelado del problema. Es acerca de tomar un problema físico y el desarrollo de las ecuaciones diferenciales o algebraicas que capturan las características esenciales del problema y así puede ser utilizado para obtener una comprensión cualitativa o cuantitativa de su comportamiento. De este modo, el problema físico puede hacer referencia a una cuerda vibrante, a la propagación de un virus, a la respuesta social a una idea. El modelado es necesariamente imperfecto y requiere simplificar sus compuestos. Es necesario mantener suficientes aspectos del sistema en estudio que reproduzcan el comportamiento modelado, pero no con tantas variables que resulte difícil de analizar. Diferentes modelos resultan útiles para describir el comportamiento real, sumando modelos continuos, discretos o estocásticos aumentan las posibilidades de acertar. Muchos no realizan el modelado y directamente van al análisis.

Análisis del problema matemático. Las ecuaciones formuladas en la fase anterior, son ahora analizadas e, idealmente, solucionadas. En la práctica, una solución explícita, fácilmente evaluada, generalmente no puede obtenerse, para ello se aproxima reduciéndose a la forma de un problema menor. Las técnicas necesarias para el análisis de las ecuaciones se emplean sobre un problema reducido que sea representativo para la validación del problema: modelo ideal.

Desarrollo de algoritmos. Es posible resolver el problema reducido empleando algún algoritmo existente (una secuencias de pasos que pueden seguirse mecánicamente sin necesidad de ingenio). Incluso si existe un algoritmo adecuado, quizás no sea lo suficientemente exacto para explorar la estructura disponible u otras características del problema, o no permite aprovechar la arquitectura de las computadoras para ejecutarlo en forma de software. A menudo, hay que combinar y mejorar los algoritmos.

Escritura de software. Para utilizar algoritmos en un ordenador es necesario ponerlos en funcionamiento sobre algún lenguaje de computadora. Escribir eficientemente un algoritmo no es fácil, depende del entorno del lenguaje de computadora y la habilidad del pensamiento matemático para traducir conceptos abstractos en rutinas de elementos y operaciones básicas. Además, escribir secuencias de comandos, módulos, funciones y objetos que llevarán a cabo los cómputos necesarios para alcanzar resultados y exponerlos quizás gráficamente.

Experimentos computacionales. El software se ejecuta ahora sobre instancias del problema y en las soluciones obtenidas, pudiendo los cálculos ser numéricos o simbólicos o mezcla de ambos.

Validación del modelo. El último paso es tomar los resultados de los experimentos, interpretar (que puede ser un tarea no trivial) y observar si están de acuerdo con el comportamiento observado del sistema original. Si no fuera así, exigirá ajustar los pasos del algoritmo. El paso de validación puede ser imposible, cuando el sistema en cuestión puede que no sea factible tecnológicamente de ensayarse en un laboratorio.

Otras tareas importantes del pensamiento matemático son demostrar explícitamente en nuestro entorno, la calibración de parámetros de un modelo, para calcular la incertidumbre y analizar el efecto de ésta en las soluciones a problemas reales.

Una vez que todos los pasos se han completado con éxito el modelo matemático puede ser utilizado para hacer predicciones, comparar hipótesis rivales y así sucesivamente mejorar el desempeño de nuevos modelos.

Un modelo matemático aplicado, es más un trabajo de pensamiento matemático para que las personas adquieran la competencia para llevar a cabo todo el proceso de modelado, donde plantear, solucionar y validar son tareas fundamentales de este tipo de trabajo[19].

Para muchos problemas, los algoritmos fueron desarrollados para contextos de aplicación distintos, ello suele requerir un esfuerzo significativo para traducir los algoritmos de un contexto a otro. Investigar y asesorarse con personas de otras disciplinas es una valiosa ayuda para el pensamiento matemático aplicado. Es erróneo dar la impresión que las matemáticas aplicadas se realizan de forma aislada al contexto del modelo. Con frecuencia, un problema matemático se aborda con la idea de desarrollar la destreza del pensamiento, que más tarde puedan ser el camino para una vida profesional exitosa. La historia esta llena de ejemplos de aplicaciones matemáticas prácticas que surgen antes de aplicaciones técnicas. Antes del siglo XX, las matemáticas fueron impulsadas por aplicaciones astronómicas, mecánicas, electromagnéticas, entre muchas más. En el siglo XX la física y los estudios sociales fueron los motores de la matemática aplicada, en áreas como la sociología, la economía, la biología, la ingeniería y la medicina. Con las cantidades masivas de datos, seguridad militar-civil y comercio digital, hoy este es el motor de creación de modelos de aplicación matemáticos del siglo XXI[20]. Desde aquí, dejamos ver que nuestra hipótesis para que un joven bachiller desarrolle el pensamiento matemático aplicado, enuncia: El desarrollo de inferencias entre matemáticas y ciencia-técnica se aprende desde ejemplos prácticos en los que intuitivamente se reconoce la naturaleza de planteamiento, soluciones y validaciones.

Entre matemáticas puras y aplicadas

La cuestión de cómo comparar las matemáticas aplicadas y puras a menudo es algo polémico. Debido a que las matemáticas puras pueden ser prácticamente útiles y las matemáticas aplicadas pueden ser un arte elegante. Las matemáticas aplicadas son una disciplina intelectual, no una parte de la tecnología industrial, no solo la aplicada necesita de la matemática pura, en sentido contrario, se necesitan también para evitar ser endogamia, estéril,

o sin sentido, la pura necesita la revitalización y el contacto con la realidad que solo la aplicación puede proporcionar[21]. Las diferencias en motivación y objetivos entre la matemática pura y aplicada deben plenamente ser reconocidas por docentes y estudiantes. La matemática pura, a menudo se trata con conceptos tan abstractos que la lógica sigue siendo la única herramienta que permite el juicio de la corrección de una teoría. Por otro lado, la matemática aplicada verifica empíricamente como juez necesario su validez ontológica, es decir, su relación con el mundo real material. Pero también es un hecho que la matemática pura esta oculta detrás de los símbolos de las matemáticas aplicadas. Pero, para ambas es necesaria la actitud de curiosidad y rigor frente al conocimiento necesario.
Suele ser la matemática pura, una segunda categoría oculta bajo los símbolos de las matemática aplicada, así que conocimiento y gusto son necesarios si lo que pretendemos es hacernos de este conocimiento objetivo. En ocasiones se considera a las matemáticas aplicadas un subcampo de las matemáticas puras.

Como ejemplo de matemáticas aplicadas destacan los algoritmos de los navegadores de Internet. En los comienzos de la década de los 90's la Web nació, y los motores de búsqueda de páginas Web se hacen indispensables para los usuarios, ordenando la información por criterios simples como el número de veces que aparecen en la consulta de búsqueda en una página. Este enfoque resultó poco satisfactorio cuando la Web creció en tamaño y los "spammers" aprendieron a influir en los resultados de búsqueda. Desde la década de 1990 hacia a delante, se desarrollaron criterios más sofisticados, basados en el análisis de vínculos entre páginas Web. Uno de ellos es el algoritmo de PageRank de Google. Otro es el algoritmo de búsqueda (HITS) hyperlinkinduced of Kleinberg. Es de destacar que ahora mismo los motores de búsqueda intentan restringir la piratería y el plagio de obras, para ello introducen criterios literarios de originalidad.

El algoritmo que ilustra la representación de las consideraciones del trabajo en la red Web corresponde a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En una búsqueda sobre las páginas Web produce:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto indica que hay una página de autoridad más alta en el ranking y es eje clasificatorio razonable de otras páginas. El primer paso del algoritmo determina la página concentradora o de autoridad, mediante la iteración de los pasos dados por el número de consultas a la misma y en relación a las palabras claves que relacionan al índice de páginas. El segundo paso construye el grafo de iteración entre las mismas, como tercer paso con ayuda de la matriz A, se computa búsquedas particulares sobre la Web, de este modo el modelo es válido para computar el ranking por el concepto de página de autoridad.

Otro ejemplo de matemáticas aplicadas refiere al proceso de cambio de una imagen digital para hacerla más agradable a la vista mediante la eliminación de un tinte de color, ajuste creativo de color y contraste, suavizando las arrugas en rostros humanos entre otras funciones de edición digital de imágenes. En los días de la cámara digital y teléfonos inteligentes que procesan fotos y video, se requieren aplicaciones adecuadas para clonar zonas de imágenes de interés. La clonación es la copia de una zona de la imagen de interés. Su uso común es quitar defectos o elementos no deseados de una imagen, como polvo, manchas y cables.

Una herramienta de clonación es el software moderno que utiliza matemáticas sofisticadas para la mezcla de fragmentos de imagen. Nos representa la imagen como una función **f** de dos variables f(x,y) de un RGB (Rojo,Verde,Azul) triplete correspondiente al punto (x,y). En la práctica, una imagen es una discreta rejilla de puntos y valores RGB, que son números enteros. Nuestro objetivo es reemplazar un objeto abierto en la región Ω, por una región que tiene la misma forma y tamaño, pero es de una ubicación diferente a la imagen, y por lo tanto corresponde a una traducción $(\delta x, \delta y)$. Si simplemente copiamos la región de origen en el destino, el resultado es no conveniente visualmente para la imagen, ya que no conserva la textura al rededor de la frontera $\delta\Omega$. Para aliviar estos problemas podemos reemplazar **f** dentro de Ω por la función **g** que está definida por la ecuación diferencial PDE siguiente:

$$\Delta g(x,y) = \Delta f(x+\Delta x, y+\Delta y), (x,y) \in \Omega,$$
$$g(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

Donde $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ es el operador Laplace. Nosotros podemos forzar **g** para que sea idéntica a **f** sobre el límite de la región de destino, pero dentro de la región Laplaceana de **g** que tiene que coincidir con de la de **f** en la región origen. Se trata de una ecuación Poisson con condiciones limites de Dirichlet. Puesto que el operador Laplace está conectado con los efectos de difusión en equilibrio, debemos pensar en los píxeles de la imagen de difusión para formar un resultado visual más convincente. Otra interpretación que demuestre que la solución tiene suavidad óptima en cierto sentido, se minimiza mediante:

$$\int_{\Omega} \|\nabla g - \nabla f\|^2 d\Omega$$

Donde $\nabla = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^T$ es el operador gradiente y $\|\bullet\|$ es el $L_2 - NORM$. En la práctica, PDE es resuelta por métodos numéricos. Adobe Photoshop, software de manipulación de imágenes digitales lanzado en 1990, introdujo una nueva característica denominada Pincel Corrector en 2002. Se lleva a cabo mediante la clonación resuelta por ecuación biarmónica

$$\Delta^2 g(x,y) = \Delta^2 f(x+\partial x, y+\partial y)$$

Donde $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, porque esto ha demostrado que proporciona una mejor coincidencia de los derivados en la frontera y de tal modo que produce una mejor mezcla de la fuente en el área que contiene el objetivo. En este caso estamos minimizando

$$\int_{\Omega} (\Delta g - \Delta f)^2 d\Omega \quad .$$

La idea de usar la ecuación de Poisson o la Ecuación biarmónica para llenar vacíos en los datos dimensionales que aparecen en otras áreas de aplicación, como por ejemplo en mateo y modelado de datos geofísicos propuestos en la década de 1950.

Un problema relacionado, es cómo detectar cuando una imagen ha sido objeto de clonación dentro de las ciencias forenses. La aplicación incluye la comprobación de la veracidad de las imágenes que aparecen en los medios de comunicación como evidencia en casos legales y comprobar la legalidad de la prueba fotográfica como imagen orgánica, es decir, no manipulada digitalmente. Las mismas consideraciones que hacen posible la clonación también permiten su uso para detectar este procedimiento digital. Se emplea para tal fin forense el operador Laplaceano o biarmónico para evaluar los valores y hacer búsquedas sistemáticas para encontrar áreas con esta propiedad. Una complicación es que si la imagen se ha comprimido después de la clonación, normalmente, en una compresión **jpg**, la imagen eliminará el ruido de clonación causado y derivado de procesos de mapeo de píxeles. Tener que lidiar con ruido es un requisito común en las aplicaciones matemáticas de procesos de video, fotografía y sonido, recientemente se aplican en proteínas y genes para identificar patrones de clonación relacionados con manipulación biotecnológica artificial y de este modo reconocer virus, proteínas que deliberadamente sean manipuladas en laboratorios con fines de terrorismo o uso industrial.

La aritmética computacional o bioinformática, es la moderna biología, para nosotros en la era digital juega un rol computacional relevante para nuestro modo de vida, por ejemplo, para realizar cálculos aritméticos para una amplia gama de tareas que incluyen el diseño de fármacos, anticuerpos y tejidos sintéticos. La matemática aplicada y la ciencia computacional son responsables de asegurar que los cálculos que producen sean el resultado correcto, y no se caiga en una situación infame, así que otra forma de tomar decisiones éticas es basarlas en la confiabilidad de los cálculos computacionales, la propia decisión de no permitir la clonación humana, se ve en el criterio ético de un cálculo que demuestra que esta actividad pone en peligro a la especie.

La matemática aplicada puede estar presente en todo tipo de aplicaciones de laboratorio de investigación académica, enseñanza o de recreación en videojuegos. Toda innovación implica su tiempo haciendo matemáticas en el sentido tradicional de sentarse con lápiz y dibujar en papel ecuaciones o demostrar teoremas, redacción de justificación de modelos y programación de software que exprese las soluciones. Intentamos aquí que los estudiantes se den cuenta que interesarse e invertir tiempo al pensamiento matemático es lo que posibilita control, manipulación, descripciones de todo tipo de realidades físicas, biológicas, administrativas, financieras, artísticas, … , en otras palabras, las matemáticas permiten a las personas ganar autonomía intelectual y estar en sociedad en redes creativas es la más autentica soberanía intelectual de un país.

Las matemáticas suelen ser una tarea solitaria, es decir, uno puede estar trabajando sobre diferentes problemas, pero cuando se es un novel (aprendiz), es necesario colaborar en una sociedad de aprendizaje entre docentes y alumnos al modo de colaborar en discusiones en las que se interpretan, aprenden procesos y se amplía la base conceptual simbólica del lenguaje artificial llamado matemáticas. El conocimiento aplicado proporciona una fuente importante de identidad disciplinar y capacidad profesional, así como oportunidades de desarrollo profesional dentro de una red de trabajo en una sociedad laboral.

Los ejemplos anteriores nos ilustran la importancia de la matemática aplicada, son una muestra de la importancia del impacto de ésta en nuestro futuro, y por lo tanto requiere una discusión más detallada.

Las matemáticas aplicadas proporcionan la herramienta y sus algoritmos permiten la comprensión y modelado productivo de muchos aspectos de nuestra realidad, incluyendo pronósticos del tiempo para tráfico aéreo o la agricultura. En muchos casos los modelos se utilizan para informar a los responsables de gobiernos, para toma de decisiones a favor de sus sociedades. Todos usamos un algoritmo matemático de manera cotidiana. La transformación rápida de Fourier, que se encuentra en todos los dispositivos móviles tales como teléfonos inteligentes. Por ejemplo, las fotos de nuestra cámara digital vistas en pantallas se almacenan generalmente utilizando una forma de compresión JPEG. Del mismo modo, tomografía de rayos X, scanners de equipaje en aeropuertos, exploradores del cuerpo humano como resonancias electromagnéticas nucleares, dependen de la solución precisa de problemas de recuperar información de sistemas de medición libres de ruido (errores) introducidos desde fuera del sistema.

El lenguaje aplicado a soluciones matemáticas, es necesario para los ingenieros y todo tipo de técnicos que podría decirse que quien maneja este lenguaje puede ser considerado un tecnólogo que maneja el arte de la matemática aplicada. Sugerimos comenzar por la notación occidental heredada a nosotros por los antiguos Griegos.

Α α	alpha	Ν ν	nu
Β β	beta	Ξ ξ	ksi
Γ γ	gamma	Ο ο	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
Ε ε	epsilon	Ρ ρ	rho
Ζ ζ	zeta	Σ σς	sigma
Η η	eta	Τ τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	upsilon
Ι ι	iota	Φ φ	phi
Κ κ	kappa	Χ χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
Μ μ	mu	Ω ω	omega

Otra notación

$\Rightarrow$ Implica
$\Leftarrow$ Implicado por
$\Leftrightarrow$ Sí y solo sí
$\exists$ Allí existe
$\nexists$ Allí no existe
$\forall$ Para todo

La tabla de enumeración del alfabeto griego es ampliamente utilizada para denotar variables matemáticas en modelos de la realidad. Tenga en cuenta que casi siempre $\delta y \varepsilon$ se emplean para denotar cantidades pequeñas o infinitesimales, y π para expresar pi=3.14159… Las matemáticas tienen una gran cantidad de notaciones para expresar conceptos comprimidos bajo un símbolo. Pero la notación es un recurso de enorme utilidad para ciencia y la ingeniería, si embargo aprenderla para inmigrantes a este espacio intelectual, aveces se le presenta como un terror que al no aprender con cuidado sus conceptos asociados, produce vértigo y estrés traumático. Pero si se aprende sus proceptuales-símbolo asociado en la escritura matemática, se abre la posibilidad de ser habitantes del mundo del pensamiento matemático y no meros turistas memorísticos de esta notación artificial que da rigor a los argumentos técnicos y científicos. Leer y entender argumentos matemáticos es discutir la coherencia, es decir, la no contradicción lógica expresada en toda su estructura. Como ejemplo de la notación matemática nos introducimos a la noción de números complejos tan presentes en aplicaciones de telecomunicaciones, física cuántica y otras muchas áreas de aplicación.

Números y continuidad en la línea

Es muy difícil leer letras negras en una habitación oscura. Sobre todo si no hay ningún texto. Esto nos parece particularmente descriptivo de cómo la ciencia procede sobre una base diaria cuando investiga en la realidad, sea esta lo que fuere. El trabajo del académico, es un oficio paciente para que los cañonazos de información no nos distraigan de ser cautos al arribo del talento necesario para inferir dentro de un rompecabezas infinito, en el que la razón es desafiada en la fabricación de soluciones creativas.

Nos damos cuenta que en el académico habita un proceso científico, con la sensación de estar en un cuarto oscuro, chocando contra cosas no identificadas, buscando fantasmas de conocimiento apenas perceptibles dentro de un infinito de información. La búsqueda sistemática de la ciencia de los últimos 500 años, ha revelado más sobre el universo que los 5 mil años anteriores de historia de la humanidad. Nos imaginamos una comunidad de conocimiento con la regla de oro, es decir, hablamos del método científico, un conjunto inmutable de preceptos para idear experimentos que avanzan hacia fuera de los hechos modernos que modifican sin precedente la vida humana y su entorno. La luz en la oscuridad es la matemática de números y el texto académico, que representan la luz en el aula oscura, buscando su siguiente escenario a explicar. El presente texto, dado como ejemplo, nos introduce a rol de los números con el concepto de continuidad, además del plano y álgebra compleja tan necesarios en la tecnología electrónica moderna.

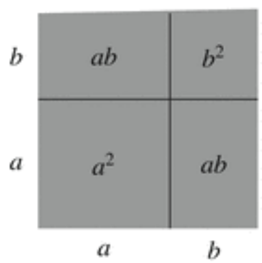
El propósito es explicar la extensión de los números reales al plano complejo y el concepto de continuidad desde la noción de número. Para ello los números enteros, racionales, e irracionales se vislumbran como necesarios para la continuidad e infinitos dentro de una línea continua en el espacio geométrico.

Números en el infinito de una línea

La cultura humana y sus sociedades desarrollan al número por la necesidad de hacer eficiente los procesos rudimentarios de contar. La propia estructura del cerebro que adoptó circuitos de cálculo neuronal, hace de nuestras abstracciones una actividad coherente con las herramientas matemáticas modernas. Incluso la notación de número, tan obvio ahora, es el resultado de un lento proceso de invención que demoró miles de años. Según los antropólogos cada persona tiene cierta capacidad innata para adquirir la noción de los primeros números, emparejando el sentido de símbolo y el de cantidad de objetos referidos[22]. Casi todas las personas parecen haber utilizado sus dedos como contadores naturales, de allí que se fijara el término dígito para referirnos a número e inclusive que se adoptara la base 10 como la más natural. El primer paso fue organizar números en grupos convenientes de 10, dado que significa "hombre". Los Mayas se especula que adoptaron un sistema vigesimal, por ser el 20 el número de dedos de pies y manos. Los babilonios adoptaron un grupo base 60 (sistema sexagesimal), sistema que aún se utiliza para medir el tiempo, ángulos en minutos y segundos. Así nacieron los sistemas numéricos, cuando el grupo de cuenta básico es fijo y cuentas superiores al primer grupo se obtienen contando desde cero a un nuevo grupo dentro de un sistema posicional. Los científicos creen que los animales poseemos en nuestro cerebro un dispositivo de procesamiento numérico que llaman **acumulador**, en consecuencia, nos proporciona por intuición los conceptos de cantidad, espacio geométrico y probabilidad en términos numéricos[23]. Pero es la base axiomática de verdades intuitivas la referencia evidente, es de origen biológico y verdades únicas a la especie.

En la línea histórica, el análisis es una disciplina moderna con raíces antiguas. Los mecanismos de análisis, es decir, el cálculo a partir de un sistema de piezas platónicas, es una fusión de la aritmética con la geometría. Este problema de la fusión fue abordado con éxito hace unos 300 años A. C., al vincular geometría y aritmética en las tablas de multiplicar. Pero, es con Euclides en su obra "Elements" que nace de este trabajo el razonamiento de demostración deductivo moderno. Los griegos descubrieron en la dificultad de conciliación de aritmética y geometría, la existencia de números irracionales. Los irracionales son necesarios para cubrir las brechas del concepto primitivo de número.

La pregunta específica de ¿por qué **ab=ba**? No es tan trivial como parece, donde **a** y **b** son números, **ab** y **ba** son el producto de **a** y **b**. Todavía tendríamos que precisar el concepto de número y del producto. Para ello Euclides consideró a los números **a** y **b** como longitudes y al producto **ab** como el rectángulo con lados perpendiculares **a** y **b**. Es así que nace la percepción geométrica del mundo numérico[24]. Es totalmente obvio que **ab=ba,** porque el rectángulo con lados perpendiculares prueba este hecho interesante de fusión geométrica y aritmética. Otro caso similar es por ejemplo:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Esta fusión crea el álgebra como producto de hasta tres longitudes en caso para los Griegos. Aquí nace la idea de que las **líneas** son lo que llamamos curvas algebraicas o dimensiones. Ciertamente, nada podría ser más claro. Sin embargo, es sorprendente que a la misma idea se aplican otros tipos diferentes de cantidades que varían en sentidos continuo o discreto en saltos. Encontrar conceptos de números entre lo continuo y lo discreto implica un nuevo desafío. Por número se responde a dos preguntas ¿cuántos y cuánto?, la primera se contesta con los números naturales 0,1,2,3,4,5,6,7,… esos que se originaron con el simple propósito de contar, pero de igual manera intuitivamente surgieron a la par las estructuras de operadores de adición, resta, multiplicación y división. Las operaciones de resta crean la extensión de los números naturales a los números enteros.

…,-3,-2,-1,-0,1,2,3,…

Y la operación de división extiende los números enteros a los números racionales para todos, por lo que la división define a los números racionales distintos de cero. Sin embargo, esta extensión de los números no distrajo del objetivo original de contar y contestar sobre ¿cuánto?

Esto es debido a cantidades ontológicas como longitud, masa, área, …, con las que se puede medir el mundo con precisión, empleando para tal efecto de precisión fracciones decimales, que son números finitos decimales de la forma $m/10^n$, donde **m** y **n** son números enteros. Pero pronto se descubrieron divisiones que dan por resultado una precisión arbitraria inexacta a cualquier número racional. Por ejemplo, el caso más típico es la longitud de la diagonal de $\sqrt{2}$, no hay ningún número racional cuyo cuadrado es igual a 2. Es así que la geometría escondía en su interior números irracionales.

¿Qué es una línea?, más precisamente ¿qué son los puntos, y cómo forman la línea?, desde luego que nos gustaría decir que los puntos en la línea son números, pero es difícil recrear la calidad intacta y uniforme de la línea en una perspectiva fragmentada de unidades individuales de un algo. Si visualizamos los números enteros en la línea, su extensión es fragmentaria, de la misma manera al extender esta idea a los puntos racionales, aunque más densos que los enteros, hay infinitamente muchos espacios entre intervalos de racionales. Pero es con los irracionales donde la imagen nos lleva más cerca de una definición aritmética de los puntos de una línea. Por eso necesitamos conceptos de decimales infinitos, que abarquen puntos racionales e irracionales de una manera uniforme. Decimales infinitos y finitos corresponden al orden de los puntos en la línea.

Como hemos dicho un decimal finito es un número de la forma $m/10^n$, donde **m** y **n** son números enteros, se escriben insertando un punto decimal para la fracción que acompaña a la parte entera del número. Y una coma decimal para expresar el límite decimal de dígitos, por ejemplo:

$324/10^2$

$3.24,$

Para el caso de números decimales infinitos tres puntos anteceden al coma decimal, por ejemplo:

π
3.141592…,

Es intuitivo que cada punto de la línea corresponde a un decimal infinito, porque podemos encontrar las sucesivas cifras decimales de cualquier punto **P** comenzando con el intervalo de enteros que contiene a **P**, dividiendo el intervalo en 10 partes iguales para encontrar el primer decimal de **P**, y así sucesivamente. Así, infinitos decimales dan una representación numérica simple de puntos sobre la línea, que es particularmente conveniente para describir el orden de puntos. Sin embargo, los decimales infinitos no son ventajosos para describir la adición y la multiplicación, por lo que no son una solución útil del problema de la definición de adición y multiplicación de números irracionales.

En resumen, los números están relacionados con la geometría porque los números verdaderos son motivados por nuestra imagen mental de la línea. Sin embargo, la geometría de la línea no es muy interesante, en comparación con la geometría del plano. ¿Qué propiedades de los números son pertinentes a la geometría del plano? La respuesta la da Pitágoras: Esto es un número entero triple tal que es un cuadrado perfecto.

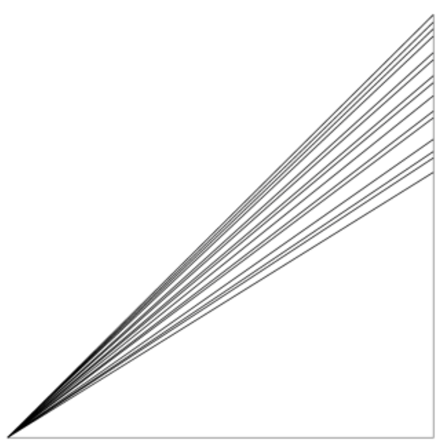
Tabla 1. Tabla Plimpton 322.

Interpretación (decimal)				
$(c/b)^2$ C1	a C2	c C3	PRUEBA	b=c/raiz(C1)
1,98340278	119	169	1,98340278	120
1,94915855	3367	4825	1,94915855	3456
1,91880213	4601	6649	1,91880213	4800
1,88624791	12709	18541	1,88624791	13500
1,81500772	65	97	1,81500772	72
1,7851929	319	481	1,7851929	360
1,71998368	2291	3541	1,71998368	2700
1,69277344	799	1249	1,69270942	960
1,64266944	481	769	1,64266944	600
1,58612257	4961	8161	1,58612257	6480
1,5625	45	75	1,5625	60
1,48941684	1679	2929	1,48941684	2400
1,45001736	161	289	1,45001736	240
1,43023882	1771	3229	1,43023882	2700
1,38716049	56	106	1,38716049	90

La tabla Plimpton 322 original, enumera los pares $\langle b,c\rangle$ en el orden dado para los cuales parecen casi al azar. La primera persona en darse cuenta de que los pares $\langle b,c\rangle$ matemáticamente significaban algo más, fue Otto Neugebauer en 1945, propone que son números enteros en cada caso, esto lo llevó a sospechar que la Plimpton 322 era realmente una tabla de triples $\langle a,b,c\rangle$ con la propiedad

$$a^2+b^2=c^2$$

Estos tripletes se llaman pitagóricos por el famoso teorema de Pitágoras que afirma que en cualquier triángulo rectángulo con lados **a, b**, la hipotenusa es **c**. ¿Apenas puede ser una coincidencia que el número **b, c** tiene la característica numérica que $\sqrt{c^2-b^2}$ es un número entero, pero ¿Plimpton estaba pensada en triángulos? Lo que hace esto casi seguro, es que la relación de la pendiente de la hipotenusa, decrece de manera constante y es aproximadamente igual justo debajo de la cuesta por encima de 30°. Así, los tripletes son geométricamente ordenados y delimitados de forma natural. Son solo 16 triángulos entre los limites mencionados, sujetos a una cierta condición de simplicidad, Plimpton 322 por lo menos contiene 15 de ellos.



Estos resultados sugieren que los números Plimpton 322 tienen un significado geométrico y demostraron que el teorema de Pitágoras fue conocido antes que el propio Pitágoras naciera, unos 500 años. Estos 15 triángulos son encontrados como base de inclinaciones de pirámides antiguas, como evidencia de que estas civilizaciones no querían construcciones que implicaran a los infinitesimales irracionales, quizás por razones religiosas.

Ahora que nos hemos dado cuenta que los números racionales e irracionales completan plenamente los puntos de una línea de números reales, podemos esperar que existan de manera similar funciones racionales entre las funciones reales. De hecho, son funciones racionales como cocientes de polinomios. Una función **f** es un conjunto ordenado de pares $\langle x,y \rangle$ que incluyen a más de un par $\langle x,y \rangle$ para cada **x**, en cuyo caso decimos que $y = f(x)$. El conjunto de **x** valores ordenados se llama dominio de **f**, y el conjunto de valores de **y** se llama rango. Reducir el concepto de función al de conjunto, es parte de la visión de las matemáticas que considera que todo en el fondo es definido por conjuntos.

El plano complejo

Los números reales $\mathbb{R}$ incluyen a los racionales e irracionales, que corresponden a todos los puntos de una línea infinita llamada línea real. Parece indiscutible que el cuadrado de un número negativo es positivo, puesto que el cuadrado de un número real es no negativo, cumpliendo la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

Es Raphael Bombelli en 1526 quien introduce el número complejo, fue en su obra L'Algebra[25], donde se observa a simple vista que la ecuación anterior no tiene ninguna solución real (raíces). Sin embargo, Roger Penrose destaca que al superarse el parecer imposible, por un enfoque razonable que exige otro sistema de números que sea adecuado para tales propósitos, en que nos permita resolver la ecuación[26] $x^2 + 1 = 0$. Para este caso la ecuación algebraica general de grado **n,** donde $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales cualesquiera.

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

Este objetivo solo puede lograrse si conseguimos de alguna manera extender el sistema de números reales por otro que es parte, lo hacemos con un sistema de numeración de otro más extendido. $x^2+1=0$ es en cierto sentido la ecuación algebraica más simple sin raíces reales, un primer acercamiento evidente para nuestro problema es introducir una unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$, es decir, una nueva dimensión y entonces el plano numérico se extiende al número complejo de la forma:

$a+bi \;\; o \;\; a+ib$,

Donde **a** y **b** son números reales arbitrarios y la operación de estos números se define de manera natural como binomios $a+bx$ donde **x** es desconocida, salvo en este caso:

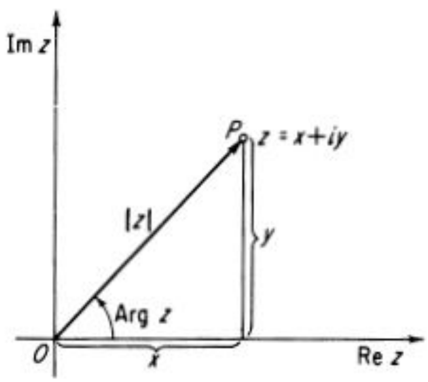
$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, \; i^5=i,...$

Sí b=0, observamos que solo está presente la línea real con sus características especiales. Asombrosamente como veremos resulta que una vez que permitimos que **x** tome valores complejos, la ecuación general algebraica siempre tiene una raíz, aunque los coeficientes $a_0, a_1, ...a_n$ sean números complejos, un resultado que es conocido como el **teorema fundamental del álgebra**: establece que todo polinomio de grado mayor que cero tiene una raíz.

Por número complejo nos referimos a una expresión $a+bi$, donde **a** y **b** son números reales e "**i**" es la unidad o dimensión imaginaria. Si **a** es la parte real de **c**, escrita como **Re c**, **b** es llamada la parte imaginaria de **c**, escrita como **Im c**. El número complejo cero es $0=0+0i$, donde las partes imaginaria y real valen cero. Por definición dos números c_1, c_2 son iguales solo sí

$\text{Re } c_1 = \text{Re} c_2$,
$\text{Im } c_1 = \text{Im } c_2$,

Si Im c=0, c=a+bi se reduce a un número real, mientras que $\operatorname{Im} c \neq 0$, se dice que c es puramente imaginario. Los números complejos pueden ser representados geométricamente como puntos en el plano, un hecho que no solo es útil, sino prácticamente indispensable para la ingeniería y la aplicación científica moderna de este "mágico número", como lo llama Roger Penrose. Con la introducción de un sistema de coordenadas rectangulares en el plano, podemos identificar el número complejo $\mathbb{C}$, como $z = x + iy$, asociado con el punto P.



De esta manera, establecemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los números complejos y el conjunto de todos los puntos en el plano con una precisión infinita dado que las partes **Re** y **Im** son números racionales e irracionales. Claramente, con esta asignación, el conjunto de todos números reales en el eje **x** y el conjunto de los números puramente imaginarios en el eje **y**, mientras que el conjunto de los números $\mathbb{C}$ corresponden al plano complejo o llamado plano **z**, en el entendido que tal plano **z** es construido por términos $z = x + iy$ que son los puntos que definen la densidad de la superficie **z**. Otra manera de representar al número complejo es usar el vector posición que une el origen con algún punto en el plano **z**. El vector $\overrightarrow{0P}$ cuyo módulo o norma está dado por el valor absoluto del número complejo **z**, denotado por $|z|$. El ángulo de dirección entre el eje real y el vector $\overrightarrow{0P}$, es positivo solo si la rotación es en el sentido antihorario y negativo en el sentido contrario; se llama argumento del número complejo z y se denota por Arg z. En otras palabras $|z|\ y\ Arg\ z$ son las coordenadas polares $r\ y\ \phi$[27] .

$x = \operatorname{Re} z = r\cos\phi$
$y = \operatorname{Im} z = rsen\phi$

Por lo tanto

$z = x + iy = r(\cos\phi + isen\phi)$

Esta última forma es la que se llama **forma trigonométrica** de un número complejo z. Claramente Arg z, se define solo en un múltiplo entero de 2π. Sin embargo, existe uno y solo un valor de Arg z, es decir de ϕ, que satisface la desigualdad

$-\pi < \phi < \pi$
$Arg\ z = \arg z + 2n\pi$

donde **n** se extiende sobre los números enteros positivos y negativos incluyendo al cero.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

y

$tag(\arg z) = \frac{y}{x}$

Se requiere algún cuidado en invertir la expresión de la tangente, puesto que el arco tangente de un número real **x**, es escrito como Arc tan **x**, y se define solo para múltiplos enteros de π. Sin embargo, existe uno y solo un valor de Arc tan **x**, digamos un α que satisface la igualdad

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

y llamaremos al valor α el valor principal del arco tangente de **x**, escrito arc tan **x**. Nosotros ahora podemos invertir la relación $tag(\arg z) = \frac{y}{x}$, obteniéndose

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & si \;\; x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & si \;\; x < 0,\, y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & si \;\; x < 0,\, y < 0 \end{cases}$$

Por otra parte, $\dfrac{y}{x}$ se convierte en infinito, claramente si tenemos

$$\arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si \quad x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & si \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

mientras que el caso z=0 es indeterminado como la versión Maya del cero.

Los números complejos

$x + iy$

$x - iy$

se dice son números **complejos conjugados**, si uno de estos se denota por **z**, y el otro se denota por $\bar{z}$ o z^*.

Obviamente los puntos z y $\bar{z}$ son simétricos con respecto al eje real **x**.

$|\bar{z}| = |z|$

$\overline{(\bar{z})} = z$

$\bar{z}z = |z|^2$

Por otra parte

$\arg\ z = -\arg\ \bar{z}$

A menos que z sea un número con la parte real negativa, en cuyo caso

$\arg z = \arg \bar{z} = \pi$

La ecuación de Euler o llamada por otros, identidad de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\ senx$$

donde **i** es la unidad imaginaria. Tenga en cuenta que la identidad de Euler es poliédrica y a veces también se llama la fórmula sobre una curvatura Euler. La expresión equivalente:

$$ix = \ln(\cos x + isenx)$$

previamente había sido publicada por Costas (1714). El caso especial de la fórmula con $x = \pi$ da la identidad:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Una ecuación que conecta los números fundamentales, π, e, 1 y 0 (cero), las operaciones fundamentales +, ×, y exponenciales, la relación más importante =, y nada más. Gauss comento que esta fórmula no era inmediatamente obvia.

La fórmula de Euler se puede demostrar utilizando un desarrollo de series

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \bullet\bullet\bullet = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \bullet\bullet\bullet = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$senx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{ix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\ senx$$

También se puede demostrar utilizando la integral compleja

$$z = r(\cos\theta + i\ sen\theta)$$
$$dz = r\ i(sen\theta - i\cos\theta)d\theta$$
$$dz = r\ i\ zd\theta$$
$$\frac{1}{r}\int\frac{dz}{z} = \int id\theta$$
$$\frac{1}{r}\ln z = i\theta$$

Aplicando a ambos miembros de la igualdad la exponencial

$$\frac{1}{r}z = e^{i\theta}$$
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$
$$z = re^{i\theta}$$
$$z = re^{i\theta}$$

Donde **r** representa la magnitud de **z** y es el argumento de **z**, usualmente llamado **arg** z.

$$si$$
$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = r_2e^{i\theta_2}$$

$$Entonces$$
$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}$$
$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$
$$si$$
$$z = re^{i\theta} \quad entonces$$
$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$
$$z\bar{z} = r^2e^{i(\theta-\theta)} = r^2e^0 = r^2$$

Potencias de complejos

Ejemplo 1. Determine el valor de $(1+i)^8$

Sabemos que

$$z=(1+i)^8$$
$$z=a+bi$$
$$a=r\cos\theta$$
$$b=rsen\theta$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$Tan\,\theta=\frac{b}{a}$$
$$z^n=r^n e^{in\theta}$$

Solución:

$$Tan\,\theta=\frac{b}{a}=1$$
$$\theta=Tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$
$$r=\sqrt{2}$$
$$z^8=(1+i)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}}=$$
$$z^8=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i2\pi}$$

usando fórmula de Euler

$$si\quad e^{i2\pi}=\cos 2\pi+isen2\pi$$
$$e^{i2\pi}=1+0=1$$
$$z^8=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i2\pi}=\left(\sqrt{2}\right)^8(1)=16$$

Ejemplo 2. Determine el valor de $(\sqrt{3}-i)^6$

Solución:

$$z^6=(\sqrt{3}-i)^6$$

$$a=\sqrt{3}$$
$$b=-1$$
$$r=\sqrt{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2\right)}=\sqrt{2^2}=2$$
$$Tan\theta=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\theta=Tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$$
$$z^6=(\sqrt{3}-i)^6=2^6e^{i6\frac{\pi}{6}}=2^6e^{-i\pi}$$
$$e^{-i\pi}=\cos(-\pi)+isen(-\pi)=-1$$
$$z^6=(\sqrt{3}-i)^6=2^6e^{i6\frac{\pi}{6}}=2^6e^{-i\pi}=64(-1)=-64$$

Ejercicio 1. Determine el valor de $(3+2i)^4$ escribiendo el procedimiento

Solución:
$$z^4=-119+120i$$

La ecuación $z^n=1$ donde **n** es el valor complejo de raíces n-simas de la unidad, es decir, se dice *"cada raíz tiene una magnitud de"*. Ahora que:
$$z=e^{i\theta}=e^{i2\pi k}=1$$
Usando la ecuación de Euler:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+isen\theta$$
$$transformando$$
$$z^n=1=e^{i2\pi k}=\cos(2\pi k)+isen(2\pi k)$$
$$\Rightarrow z=1^{1/n}=\left[\cos(2\pi k)+isen(2\pi k)\right]^{1/n}$$

Ahora nosotros usamos la fórmula e De Moivre que establece:
$$\cos n\theta+isen\,n\theta=\left(\cos\theta+isen\theta\right)^n$$
Así que
$$z=\left[\cos(2\pi k)+isen(2\pi k)\right]^{1/n}=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+isen\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

Donde ***k*** es cualquier número entero. Ahora está claro que todas las **n** raíces de **z** deben estar en un círculo de radio 1, y las expresiones del tipo $\cos\theta + isen\theta$ son típicamente de la forma: $z = r(\cos\theta + isen\theta)$

Pero en este caso r=1, por lo tanto

$$z = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

Álgebra compleja

Se deduce de su tratamiento como binomiales, suma y producto de dos complejos

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

están dados por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} \qquad (x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} \neq 0)$$

Álgebra compleja es un campo para el que se cumplen las propiedades axiomáticas de toda álgebra, dado los números complejos z_1, z_2, z_3

Conmutativa bajo +
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Conmutativa bajo $\otimes$
$z_1 z_2 = z_2 z_1$

Asociativa bajo +
$(z_2 + z_1) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Asociativa bajo $\otimes$
$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

Distributiva bajo la +
$z_1 + z_2 + z_3 = z_3 + z_1 + z_2$

Distributiva bajo la $\otimes$
$z_1 \bullet z_2 \bullet z_3 = z_3 \bullet z_1 \bullet z_2$

Elemento neutro bajo la +
$z_1 + 0 = z_1$

Elemento neutro bajo la $\otimes$
$z_1 \otimes 1 = z_1$

Inverso simétrico

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$$

$$z_1 z_1^{-1} = 1$$

$$z^{-1} = (x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Hasta lo visto aquí, uno podría representar a los números complejos como pares ordenados (sin emplear la unidad imaginaria i)
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$

donde x_n, y_n son números reales, entonces multiplicación y adición pueden ser representadas

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \ , \ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Con este enfoque, la relación $i^2 = -1$ tiene como análogo
$(0,1)(0,1) = (-1,0)$

Hemos visto que la explicación de la extensión de los números reales a los números complejos no es menos exquisita que la extensión de los números enteros a los racionales y su posterior extensión de los racionales a los irracionales implicados en el concepto de una línea continua.

¿Qué ocurriría si en lugar de utilizar números complejos ordinarios, utilizamos números complejos que anticonmutan? Es cuando se crean los **Números de Grassmann** θ_i, son números anticonmutativos, es decir, la suma de la conmutación de dos números de Graassmann se hace cero

$$\theta_i\theta_j = -\theta_i\theta_j$$
$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0$$
$$\left\{\theta_i\theta_j\right\} = \theta_i\theta_j + \theta_i\theta_j = 0$$

Y en particular i=j

$$\left\{\theta_i\theta_i\right\} = \theta_i\theta_i + \theta_i\theta_i = 2\theta_i\theta_i = 0 \Rightarrow \theta_i^2 = 0$$

Así que el cuadrado de cualquier número de Grassmann es cero $\theta_i^2 = 0$

Con esta propiedad podemos hacer expansiones de funciones que dependen de estos extraños números anticonmutativos. Si consideramos una función de dos variables Grassmann llamada $f(\theta_1\theta_2)$.

Recordamos que para una función de dos variables, la fórmula de Taylor se expresa

$$F(x+dx,y+dy) = F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \ldots$$

Si hacemos la expansión de nuestra función **f** en serie de potencias que depende de variables de Grassmann, entonces

$$f(\theta_1,\theta_2) = a_o + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_1\theta_2$$
$$f(\theta_1,\theta_2) = a_o + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 - a_3\theta_2\theta_1$$

Las cantidades son números ordinarios. La expansión se detiene en el término cuadrático cruzado debido a la propiedad fundamental $\theta_i^2 = 0$

Y la segunda línea se obtiene por anticonmutación.

Ejercicios aritmética

Ejercicios 1: Represente los siguientes números complejos en su forma trigonométrica:

a. 1+i

b. -1-i

c. 1-i

d. $1+i\sqrt{3}$

Arreglos

Un arreglo es un conjunto ordenado de números de cualquier dimensión. Un arreglo de una dimensión $(a_1, a_2, ..., a_n)$ se le conoce de varias maneras, n-tupla, vector fila por estar escrito en horizontal, vector columna por estar ordenado así. Los números a_k son entradas o componentes. Un arreglo de dos dimensiones a_{ik} con **i** desde 1 a **n**, y desde 1 a **m**, es llamado matriz **n x m**. Los números a_{ik} son entradas, elementos o elementos de matriz. Uno puede pensar a la matriz como un arreglo de filas y columnas de vectores. Si añadimos dos n-tuplas

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

Esto es dos **n x m** matrices **A** y **B**, sumadas como

$$(a+b)_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Uno puede **multiplicar matrices por números**. Por lo tanto, **z** veces la matriz tridimensional a_{ijk}, es decir la matriz de entradas za_{ijk}. Podemos **multiplicar dos matrices**

$$(ab)_{ik} = a_i b_k$$

Otro producto es el **producto externo** de la matriz a_{ik} por una matriz de tres dimensiones b_{jlm}, es un arreglo de cinco dimensiones

$$(ab)_{ikjlm} = a_{ik} b_{jlm}$$

Un producto interno es posible si dos arreglos son del mismo tamaño, es decir, sus dimensiones son iguales. Por lo tanto, el producto interno $(a,b) \equiv \langle a|b \rangle$ o producto punto $a \bullet b$ de dos n-tuplas **a** y **b** es

$$(a,b) \equiv \langle a|b \rangle = a \bullet b = (a_1, a_2, ..., a_n) \bullet (b_1, b_2, ..., b_n) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

El producto interno de dos n-tuplas complejas es definido por

$$(a,b) \equiv \langle a|b \rangle = \overline{a} \bullet b = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}) \bullet (b_1, b_2, ..., b_n) = \overline{a_1} b_1 + ... + \overline{a_n} b_n$$

o de complejos conjugados

$$(a,b)^* \equiv \langle a|b \rangle^* = \left(\overline{a} \bullet b\right)^* = (b,a) = \langle b|a \rangle = \overline{b} \bullet a$$

En resumen, la noción de número y su extensión dada por operadores fusiona a la aritmética con la geometría y deja al descubierto la necesidad de nuevos números, y de esta manera, una línea es una densidad continua infinita de números y un plano un arreglo infinito de números. Esta aventura sobre la noción de número nos lleva al concepto de álgebra, función, conjunto y el caso especial del número complejo, falta mucho por caminar en este sentido, pero por ahora, saltaremos a situaciones de notación y después nos adentraremos más en esta aventura.

La lógica en la terminología matemática

Las declaraciones, sentencias o también referidas como proposiciones matemáticas, pueden ser solo verdaderas o falsas, pero no ambas. La negación de la declaración A (**not A**); en tanto **A y B**; la exclusión **A o B** que indica la frase pero no ambos; son ejemplos de declaraciones lógicas. Con operadores lógicos, la notación matemática hace posible construir razones puras, es decir, tautologías que declaran en modo de cadena una formula o una declaración expresada por sus componentes conceptuales, en un universo de implicación falso o verdadero. Por ejemplo, la implicación de declaración "si se cumple A, entonces B está satisfecha" o de otro modo un equivalente es "A implica B" al mismo tiempo $A \Leftrightarrow B$ es equivalente a $A \Rightarrow B$ y $A \Leftarrow B$. Estas tautologías son declaraciones de verdad, sin importar sí sus componentes guardan un estado falso o verdadero. Una contradicción es un estado que afirma una falsedad, independientemente de si las declaraciones de los componentes conceptuales son verdaderos o falsos.

La no contradicción en las cadenas de razón, es un requisito necesario para la demostración. Por ejemplo, $A \Leftrightarrow B$ entonces, A satisface si y solo si B es satisfecha. La implicación $A \Rightarrow B$ es una parte que es necesaria, mientras $A \Leftarrow B$ es innecesaria y equivalente a decir $not\ B \Rightarrow not\ A$.

Un **teorema** es una declaración importante, es una proposición de importancia por su función primordial de su rol de lema, en muchas ocasiones se nos presenta en modo de fórmulas. Por otro lado, los **lemas**, su función es apoyar la prueba de un teorema o proposición general. Además, un **corolario** es una consecuencia de un teorema o proposición. Análogo en la ciencia, sí un dato es un teorema, proposición o corolario, entonces, los hechos serian declaraciones probables de un estado de verdad en la realidad material.

La presencia de operadores en las cadenas de razón, es la lógica implicada a los conjuntos, esas colecciones de existenciales como un todo. Las partes de un conjunto se llaman elementos o miembros del conjunto. La expresión $x \in A$ significa que **x** es un miembro del conjunto A, y se lee "**x** es un elemento de A" o que **x** es un existencial de A. La expresión $x \notin A$ significa que x no es un existencial del conjunto A. Asumimos que todos los conjuntos están formados de elementos de algún conjunto universal bajo consideración. El conjunto de los números Reales se denota por $\mathbb{R}$, enteros por $\mathbb{Z}$, complejos $\mathbb{C}$ y enteros positivos $\mathbb{N}$. Mientras, con la idea de conjunto que ya hemos expresado, asumimos que cualquier particular existencial puede ser definido dando una regla para decidir cuales elementos del conjunto universal en el sistema invocado y cuáles no. Por ejemplos, si $\mathbb{R}$ es el conjunto universal, entonces el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1 se escribe $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$. Esto se lee "el conjunto de todos los **x** en $\mathbb{R}$ tal que el cero es menor que **x** y **x** es menor que uno. En la expresión $\{x | 0 < x < 1\}$ el símbolo **x** se utiliza como una variable local. Es decir, **x** no tiene significado fuera de la expresión. A veces la regla de pertenencia a un conjunto no se menciona explícitamente, sin embargo, es evidente. Por ejemplo, puede administrarse un conjunto enumerando sus elementos, $\mathbb{N}_3 = \{1,2,3\}$.

Ya hemos dicho que una declaración matemática es una expresión definida que es falsa o verdadera, pero además, cuyas reglas pueden ser de simetría (=), de pertenencia ($\in$) o inequidades (<, >) en relación a las propiedades que satisfacen los miembros de un conjunto **A**. Mientras al conjunto sin elementos se le llama conjunto vacío y es denotado por ϕ. Una de las consideraciones para una colección vacía como un conjunto, es denotar los extremos, la nada y el todo.

El siguiente paso es definir que es discurso de demostración. Una demostración matemática consiste en una secuencia numerada de sentencias, donde cada una debe seguir lógicamente una coherencia con las declaraciones inmediatas anteriores[28].

En resumen, hemos dado cuenta en la introducción que las matemáticas son una actividad académica de pensamiento y no una actividad de una computadora de procesos en un vacío de conciencia. Son el resultado de siglos de creatividad humana, el cerebro con todas sus fortalezas y limitaciones biológicas encontró en las matemáticas una inspiración para llenar la existencia humana de desafíos de comprensión. No es que la mente no pueda por sí sola realizar diferentes tipos de comprensión, incluyendo inferir su propia existencia, pero requería de una comprensión rigurosamente lógica para demostrar paso a paso su comprensión formal de las **existencias abstractas** y **ontológicas que la componen**. Cada paso individual de una proposición es a la vez el deseo de hacer encajar entre sí ideas en el amplio sentido de la demostración, es decir, de esas razones que hacen coherente el pensamiento objetivo. De aquí, otro tipo de entendimiento surge, el que parte del lenguaje artificial matemático como estructura de soporte de una semántica de lenguaje natural, que recrea el pensamiento hipotético en su mejor versión científica. Se trata del montaje de ideas y fundamentos teóricos y fácticos dentro de cadenas de razones que infieren una conclusión: los **argumentos**. Una comprensión del individuo, en una ambigüedad y vaguedad reducidas a un mínimo, hace que la comprensión general de las ideas como un todo coherente tengan un efecto de progreso acelerado de los beneficios científicos para una sociedad[29]. Si bien David Hilbert sucumbió ante su idea absoluta de considerar que las matemáticas son en esencia el acto de demostración, cuando Henri Poincaré le insta en su propuesta inductiva de las matemáticas a que demuestre los axiomas de la matemática[301]

Desde luego que la comprensión no es solo estética, académica o científica. La humanidad está condenada a lidiar con sus errores materiales, de juicio, de interpretación y dogmas. En el método de demostración, paso a paso podemos notar una consecuencia lógica o una incoherencia, pero solo es dentro del marco general, donde notaremos si un error conduce a una conclusión que no encaja con la totalidad de la realidad en contexto, la contradicción es la señal por excelencia que buscamos corregir para hacernos de un mejor conocimiento. Esta combinación de comprensión paso a paso y en el contexto de lo general, es la oportunidad de detectar errores y progresar en la comprensión profunda de las diferentes parcelas de la realidad. Debemos desarrollar ambas capacidades con el fin apreciar el arte presente en el pensamiento científico y matemático, entender paso a paso es fácil, solo basta una vez y hacer muchos ejercicios taladrando en la idea hasta su claridad. Pero en el contexto general de la idea, esto no basta, se trata de demostrar la idea global y no solo las piezas que la forman y dan sustento. Es común que la nueva información haga tambalear las teorías y forcé a su renovación modificando sus inconsistencias.

En la formación de conceptos complejos por parte de un estudiante, se debe considerar pensar en cualquier área de las matemáticas como ejercicio mental, esto ayuda a comprender un poco

---

[1] .

más en cada nueva tarea de pensamiento, implicando revisar ideas que creemos absolutas y cerradas, que por error creemos ya saber por estar ligeramente informados sobre ellas. Esta actividad nos hará sentir incomodos al exponer que estamos en errores de fundamento y nos da luz sobre las ligerezas en el arte del algún conocimiento. Si padecemos esta emoción, es condición reconocer nuestra ignorancia, es bueno cuando revaloraremos poder tener a nuestro alcance una extensa y diversa literatura. Incluso los más diestros y sofisticados científicos debieron en un momento dado en el pasado de su formación haber vivido complejos procesos de construcción de conceptos matemáticos, todo ello para producir explicaciones, controlar y medir la realidad.

Un novel científico ante un problema de un nuevo marco conceptual, revisa en su mente experiencias pasadas, comparando si son similares a algo que ha visto antes. En esta etapa estudiar matemáticas es reconocer los objetos matemáticos en términos de los conceptos que los definen. Cuando se supera esta etapa conceptual, es cuando las piezas u objetos matemáticos se pretende encajen en nuevas estructuras más complejas, en una apariencia inicial de un orden que requiere ser demostrado. Las definiciones están escritas de tal modo que sirven para formar cadenas de deducciones, que en procesos de pulido fino, se alcanza a lograr de forma elegante, es decir, demostraciones limpias en versiones lo más simples posible.

Cuando de niños preguntamos por qué el cielo es de color azul, asumimos que sabíamos que es un color particular. La comprensión del concepto de color requiere que sea refinado para que intentemos contestar la pregunta anterior. Por refinada entiéndase una definición que precisa en un marco teórico específico. En este caso uno que muestre con claridad lo que es un espectro de luz a través de un prisma, con el fin de llegar a saber que las longitudes de onda de luz corresponden a la luz de un color particular. El texto científico por ello emplea un arte de crear definiciones precisas e inequívocas para la formación de conceptos que permitan crear estructuras coherentes más complejas. Para que en un momento dado, estas definiciones refinadas puedan crear explicaciones de ionización de gases atmosféricos que expliquen el color azul del cielo terrestre.

El caso es el mismo para las estructuras matemáticas. Un estudiante tiene una gran cantidad de conceptos en su mente, tales como línea, punto, función, ángulo, ecuación cuadrática, regresión lineal, gráficos,…, en la facilidad de cálculos aritméticos, trigonométricos y algebraicos polinomiales entre otros. Nuestra idea es aprovechar esta riqueza diversa y estructurar nuevos objetos matemáticos necesarios para la ciencia aplicada y básica. Un experto no se enfrenta con la masa cotidiana de símbolos para que al estudiante le parezcan indescifrables, claro está que en el pasado incorporó estos objetos matemáticos mediante construcciones por definiciones refinadas, aunque este experto pueda parecer no necesitar mucha ayuda en sus cálculos una vez que alcanzó la experticia profesional.

Un concepto matemático o científico, es entonces, una cadena organizada de ideas que de alguna manera se interrelacionan con otros conceptos primarios a nuestra experiencia, desde los ya establecidos, es decir, los innatos dados por nuestra biología. Estas cadenas de ideas, son razones o argumentos que pueden ser referidos como mapas o esquemas mentales. El estudiante progresa desde la noción primaria de número, a la geometría, probabilidad, álgebra, …; entonces desde objetos o hechos conocidos, puede conocer nuevos objetos o hechos; de este modo amplía sus esquemas dentro de un lenguaje, ya sea científico, matemático o literario. Si le preguntamos a un estudiante sobre la interpretación geométrica del producto interno de vectores, puede ser que lo frustremos si en él no hay previamente una base de conocimiento de los términos involucrados en esta estructura compleja.

Un desafío de aprendizaje tiene dos caminos, uno moral y otro epistemológico. El moral está relacionado con la autoestima, dada por vivir la eficacia del desempeño. El epistemológico consiste en superar esquemas básicos por unos más complejos de la razón creativa, que implican nuevas ideas en un proceso coherente de crear esquemas nuevos. Si fuera posible seguir este modo de conocimiento creando terminología especializada, aseguramos que la vida académica de los estudiantes sería sublime, es decir, llena de curiosidad virtuosa que alimenta lo emocional y necesaria para los grandes desafíos.

En resumen:

Salir al mundo, es aprender a caminar con números

Cuando desarrollamos la habilidad para los números, la mayoría de la matemática se aprende al pertenecernos por la vía de la razón e interactuar con la realidad racionalizable. En cada nueva interacción del día a día, nos sorprenden patrones de proporción, razones y regularidades de nuestro mundo. Cuando incorporamos el sistema decimal de los números, nos hacemos más autocríticos y relacionamos seguramente al cero con la representación de un conjunto con ausencia de elementos, así nuestro comportamiento es motivado por caminos aritméticos; en unos momentos dados dividimos, en otros restamos, multiplicamos o manejamos los neutros bajo la suma o la multiplicación, creando combinaciones de ecuaciones para manejar nuevas situaciones sociales, tecnológicas y existenciales. Comprender estos patrones es en mucho ir ganando poder en nuestra sociedad, es salir de nosotros al mundo mediante la imaginación, mediante la rebeldía de proponer nuevas posibilidades de vivir. Literatura y matemáticas, ambas enfrentan a todos los que las habitan con sus infiernos, así elevan el acto de rebeldía de los nuevos héroes del conocimiento, al temor a ser olvidados. En fin, aprender matemáticas es reconocer que los números pertenecen a la vida virtuosa de las sociedades y sus individuos.

Lección 2: Matemáticas

En matemáticas, uno puede dudar si el estudio de esta vale la pena y puede beneficiarnos en algo para hacer de nuestra vida un viaje más emocionante. Muchos han intentado desalentar su estudio desde el misticismo, pero desde el pasado griego pitagórico una visión profética de este conflicto presentó la idea de que una mentalidad matemática desarrollaría el pensamiento objetivo. En cualquier caso, no hay duda que esta es la principal actitud de la mentalidad matemática. En el tiempo de San Agustín, los juristas romanos consideraron que aprender matemáticas era un hecho delictivo, es decir, prohibieron al pueblo hacer geometría. En el siglo XVII Blaise Pascal en carta a Fermat, 10 de agosto de 1660, dijo: "hablar libremente de las matemáticas, creo que es el más alto ejercicio del espíritu; pero al mismo tiempo sé que es tan inútil ante hombres que solo son artesanos comunes"[31].

El filósofo Arthur Schopenhauer, consideró que la actividad menor del espíritu es la aritmética por el hecho que esta puede ser realizada mecánicamente y por máquinas. Y desde aquí le podemos decir a los estudiantes que no les gusta el tema, que las matemáticas son buenas para explorar lo profundo y allí encontrar que la superficie aburrida de la realidad es en verdad un espejismo que oculta belleza y emocionantes leyes de la naturaleza necesarias para la técnica y la ciencia.

Un estudiante típico se pregunta ¿por qué se le pide aprender matemáticas? Hace 2300 años Platón argumentó que para entrenar a la mente para prepararnos al conocimiento objetivo. El mundo moderno necesita de las matemáticas y por ello están incluidas en planes de estudio. Tal vez deberíamos empezar nuestra respuesta a esta pregunta señalando que los hombres las citan a disgusto desde tiempos antiguos, pero los grandes periodos de la cultura de las civilizaciones están ligados a desarrollos tecnológicos y científicos excepcionales ligados al pensamiento matemático, culturas que valoran las matemáticas como la Maya, fueron grandes civilizaciones. Los griegos, quienes crearon el concepto moderno de las matemáticas, hablaban inequívocamente que su importancia es vital para sociedades democráticas y libres.

Al leer la literatura del siglo XVIII, uno se encuentra con el hecho de que estos textos contienen piezas de argumentos matemáticos. El hombre educado de este siglo consideró a este terreno del conocimiento, obligado para el desarrollo científico y técnico, importante para la soberanía de una sociedad. En esta época la física de Newton y su cálculo eran la poesía desde donde se contempló la belleza de la naturaleza.

La mayor importancia de las matemáticas en nuestro tiempo hace más imperativa que la persona de hoy sepa la función tecnológica y científica de la naturaleza, gracias al papel que la matemática juega en el pensamiento complejo de la teoría y las tecnologías. Es cierto que el papel de las matemáticas en nuestra civilización no siempre es evidente, y las aplicaciones modernas más profundas y más complejas no son fáciles de comprender, incluso por especialistas. Pero la naturaleza esencial y los logros del pensamiento matemático pueden ser reconocidos en medicamentos, artefactos mecánicos, electrónicos, neumáticos, instrumentos de medición ópticos… que sin ellos, nuestro mundo sería retornado a la era de piedra de nuestros ancestros.

Tal vez podamos ver más fácilmente por qué uno debería aprender matemáticas si tomamos un momento para considerar lo que es matemática. Desafortunadamente la respuesta no puede ser dada en una sola frase o un solo párrafo. El tema tiene múltiples caras, o algunos podrían decir que es cabeza de Hidra. Uno puede mirar a las matemáticas como un lenguaje artificial, como un tipo particular de estructura lógica axiomática, como un cuerpo de conocimiento sobre números, conjuntos, espacios, como una serie de métodos para derivar conclusiones demostrables, como la esencia de nuestro pensamiento objetivo aplicado al mundo de la ciencia y la ingeniería, o simplemente como una actividad intelectual divertida. Cada una de estas características en sí misma sería difícil de describir con precisión en un breve espacio de discusión.

¿Por qué es imposible dar una comprensión concisa y fácil de la definición de matemáticas?, algunos sugieren evasivas como que ellas solo las entienden los matemáticos. Pero estos matemáticos son seres humanos y en su mayoría hacen cosas relacionadas como las que todos hacemos para vivir en sociedad. El único mérito de lo que ellos pueden definir como matemáticas es que lo hacen desde la punta del desarrollo de esta creación humana.

Una variante de la anterior lista de puntos de vista sobre lo que son las matemáticas, es examinarlas como valor, contenido y comprensión objetiva para la paz y el progreso social humano. Si examinamos que las matemáticas desde este punto de vista aportan un lenguaje de esgrima de las ideas, y son estas las responsables de lograr que una sociedad sea construida con la premisa: que es la razón y sus productos la mejor forma de crear felicidad, justicia y estética para una sociedad como imagen verdadera de consensos argumentales que buscan despojar de toda contradicción las leyes sociales y naturales. Desde este punto de vista, las matemáticas las referimos como la sociedad que podemos lograr construyendo hombres desde la educación, con fines claros de desarrollo necesarios para la justicia social. ¿Por qué debe educarse en matemáticas? Por la sencilla razón que todo hombre o animal posee una base biológica innata para manejar cantidad, espacio y probabilidad, pero si este mamífero requiere ir a las estrellas, curar el cáncer y por ejemplo construir tecnologías de inteligencia artificial, deberemos ser claros, que es necesario cultivar en la educación el razonamiento matemático, del mismo modo que se aprende a comer al descubrir nuevos alimentos que mantendrán sana nuestra vida, aunque en principio nos parezcan no muy sabrosos.

Si bien los hombres sabían cómo alimentarse, vestirse y construir una casa desde hace milenios antes de las matemáticas modernas. Junto con la tecnología, el pensamiento matemático es un arte en lugar de una ciencia dominada por el razonamiento especulativo. Uno puede participar en ella en una multitud de posibilidades de ocupación e incluso escolar, de alto rendimiento en el mundo de la industria creativa o de la economía de innovación. Se observa que la posición social por ingreso laboral, exhibe que a mayor conocimiento matemático se desempeña mayor responsabilidad en acciones creativas de una sociedad. Es decir, un médico con licenciatura se le exige menor complejidad en su pensamiento que a un neurólogo o cardiólogo especialista. Si no fuera por esta razón, la sociedad moderna occidental como la nuestra seguramente construiría su desarrollo en el misticismo de la religión y la alquimia. Las civilizaciones que han confiado educar en matemáticas son sociedades que logran construir consensos antes que conflictos violentos, son las matemáticas un lenguaje para argumentar y de este modo ganar desempeño en el papel de hacer florecer la tecnología, la ciencia, el arte, la democracia y la soberanía intelectual de los individuos de una sociedad. Sí uno confía en la razón no instrumental, aquella que le sirve al hombre más allá de solo crear artefactos tecnológicos, es decir, aquella para discutir los valores de la sociedad, es fácil poder suministrar evidencia para demostrar que la mejor sociedad que podemos construir ahora mismo, es producto de la actividad libre de razonar en el ejercicio público del consenso de futuro. Definimos a las matemáticas como imprescindibles para una sociedad basada en el desarrollo cimentado en el diálogo racional de sus individuos.

Quienes se oponen al argumento anterior, les dejamos una idea del Premio Nobel de física de 1965, Richard P. Feynman:

"Tengo un amigo que es artista y a veces manifiesta un punto de vista con el que no estoy muy de acuerdo. Sostiene una flor y dice: *Mira qué bonita es*, y estoy de cuerdo. Pero después dice: *en tanto que artista, puedo ver lo bonito que es una flor. Pero tú, como científico, la desmontas toda, y se convierte en algo apagado*. Pienso que está un poco chiflado. En primer lugar, la belleza que él ve está disponible para otra gente, y también para mí, según creo. Aunque quizá yo no sea tan refinado estéticamente como es él, puedo apreciar la belleza de una flor. Pero, al mismo tiempo, puedo ver mucho más en una flor de lo que él ve. Puedo imaginar las células de su interior, que también tienen una belleza. Existe belleza no solo a la dimensión de un centímetro; también hay belleza a una dimensión menor. Están las complicadas acciones de las células, y otros procesos. El hecho de que los colores de las flores hayan evolucionado con el fin de atraer insectos que las polinicen es interesante; esto significa que los insectos pueden ver los colores. Esto añade una pregunta: este sentido estético que nosotros poseemos, ¿existe también en las formas de vida inferiores? Hay todo tipo de preguntas interesantes que proceden de un conocimiento de la ciencia, y que no hace más que sumarse a la excitación y el misterio y asombro de la flor. No hacen más que sumarse. No comprendo cómo pueden restar"[32].

Para los artistas claro está que hay otros modos de crear conocimiento además del científico, matemático o de ingeniería. La mayoría de la gente de hecho está convencida de que sus sentidos son realmente los suficientes para reconocer toda belleza en la realidad social o natural. La afirmación más común es *ver es creer*, idea que expresa dependencia de los sentidos sensoriales. Pero todos reconocen que los sentidos son limitados, a menudo falibles y aun cuando son precisos, evaden todo aquello que no es interpretado con ellos. Consideremos la luna llena en el firmamento, ante nuestros ojos parece no más grande que una pelota de futbol, entonces éstos debemos considerarlos verdaderos. Por otra parte, no vemos el aire que nos rodea, solo deberíamos negar su existencia.

Para considerar una situación algo más compleja, supongamos que alguien nos sostiene un lápiz y pregunta ¿qué es? Un estudiante procedente de alguna sociedad primitiva podría llamarlo un palo mágico, y precisamente esto es lo que los ojos no educados ven. Quienes lo llaman lápiz son realmente convocados desde su educación a una experiencia racional para sus mentes. Además, cuando lo miran con la mente racional, le aplicaran una patria de interrogaciones para construir un edificio de conocimiento que intente revelar su verdad hasta las profundidades de sus átomos. Por lo tanto, somos propensos a ver que detrás de nuestra habilidad para razonar la realidad, aparecen otras realidades más complejas que la superficie aburrida a la cotidianidad. Y es lo que hace el pensamiento matemático a nuestra persona ser una vida creativa y seducida emocionante por aprender de nuevas realidades ocultas a la primera vista de nuestros ojos.

Cada día vemos a la luna donde no está, en realidad el horizonte atmosférico difracta la luz dándonos una posición aparente, pero con ayuda de la geometría podemos determinar con suma precisión la posición verdadera. Los sentidos están obviamente indefensos sin algún tipo de conocimiento racional matemático, pero además, sin este último conocimiento no podríamos predecir eclipses o el comportamiento de transistores de las computadoras de nuestros teléfonos inteligentes. De este modo hay una infinidad de hechos que demuestran que aprender matemáticas es para la educación de nuestras personas, un asunto capital para participar y disfrutar de todas las virtudes de los productos del hombre de ciencia, técnica o estética de lo complejo. Las matemáticas más que cualquier otra actividad humana se basan en el razonamiento para producir conocimiento.

Generalmente aceptamos el hecho de que el razonamiento matemático es un proceso coherente, preciso, exacto y eficaz. Pero ¿qué buscan las matemáticas con su razonamiento? El propósito de toda matemática es ayudar a los hombres a desarrollar herramientas de pensamiento objetivo capaces de confiar en ellas para explorar la naturaleza y crear artificialmente música, elementos químicos, células, anticuerpos… todos ellos de diseño sintético. Parece que las matemáticas son herramientas para el pensamiento y el diseño de nuevas realidades, quizás por ello a diferencia de la filosofía, son el socio perfecto para la ciencia y la ingeniería para ir más allá de los limites de lo dado en este universo.

Revelar los secretos de la naturaleza, es como descubrir en ella las ecuaciones y patrones que gobiernan su esencia. Por ejemplo, determinar el patrón de movimiento de los planetas del sistema solar, controlar las ondas de radio, entender la danza de cromosomas en la mitosis de la división celular, estudiar las partículas atómicas, construir computadoras, autos, edificios, puentes, mesas, sillas, bolígrafos. Formular diseños, deriva en nuevas conclusiones que aceleran la innovación de la investigación, el arte, y el desarrollo industrial.

El hecho de que las matemáticas son importantes para la ciencia, la ingeniería y el arte, de inmediato revelan unos valores de carácter estético, práctico y metodológico. Los artistas pueden apoyarse en métricas para hacer poemas, música, plástica o arquitectura. Los técnicos hacen de dispositivos modelos matemáticos que emulan comportamiento, para depués interconectar todo tipo de ellos para lograr propósitos tecnológicos. Procesos de todo tipo, químicos, eléctricos, biológicos, moleculares, atómicos… son pasos de métodos de exploración científica para alcanzar nuevas fronteras del conocimiento.

Sin embargo, el progreso material no es la razón más convincente para el estudio de las matemáticas, al exagerar los valores prácticos de las matemáticas solo se pierde de vista el más importante de todos, el valor epistemológico, es decir, el valor de desarrollar en los cerebros humanos cada vez mayores logros de pensamiento. Sin duda dentro de todos los animales nuestra marca más distintiva que nos hace humanos es el acto de pensamiento. ¿Qué es la vida? ¿Cuánto mide el universo observable? ¿Cuál es la distancia de la tierra al sol? ¿Qué es la luz? ¿Cómo están las tendencias de opinión sobre los deseos de los ciudadanos? Gracias a las matemáticas ya no estamos en el centro del sistema solar, los días y las noches no están gobernados por dioses caprichosos, la agricultura puede programarse, pero lo más importante es que cada nuevo diseño de la realidad por el pensamiento objetivo, es más oportunidad para que las personas sean felices desarrollando su creatividad.

Lección 3: Matemática elemental

Presentar los campos de las matemáticas que se consideran elementales, es algo complicado en su selección temática, debido a que lo elemental a lo largo de la historia de la educación de las matemáticas tiene sus lagunas, dado que consideran elementales a los temas matemáticos necesarios para sobrevivir en la sociedad, entonces lo elemental está determinado por cada época. A principios del siglo XX elemental se consideró a la aritmética, el álgebra arábiga, geometría analítica. En la posguerra se agregó a la matemática elemental el Cálculo y la lógica. A finales de ese siglo con el auge de la informática, a la matemática elemental se le adiciona la probabilidad y la estadística, lenguajes de computación y algoritmos. Y es aquí en donde nos encontramos en la historia de la matemática elemental.

Aritmética

Probablemente el primer tema de la matemática elemental sea el álgebra aritmética, donde los dedos humanos crearon su arquitectura de números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Este simbolismo de los números de base 10, ya en si es una idea profunda, que conduce a muchos problemas fascinantes sobre los números. A considerar el significado de número 1578. Este símbolo está organizado por números en posiciones especificas, similar a presentarlo separado por comillas, es decir:

$$1578 = (1 \bullet 10^3) + (5 \bullet 10^2) + (7 \bullet 10^1) + (8 \bullet 10^0)$$
$$1578 = (1 \bullet 1000) + (5 \bullet 100) + (7 \bullet 10) + (8 \bullet 1)$$
$$1578 = 1000 + 500 + 70 + 8$$

Por lo tanto, para saber el significado de los números decimales, uno tiene que entender además, la suma, la multiplicación y exponenciación. De hecho, la relación entre los números y los números que representan es nuestro primer encuentro con un fenómeno que es común en las matemáticas y la vida: crecimiento exponencial. Nueve números positivos es decir 1,2,3,4,5,6,7,8,9, son dados por números de un solo dígito, *77* o 10,11,12,13,...,*77* son números de dos dígitos, 800 es un número de tres dígitos y así sucesivamente. Al agregar un dígito a la cifra, la numeración se multiplica por 10. Cinco o nueve cifras representan la capacidad de numerar un conjunto de ese tamaño, pero para nombrar las estrellas de universo no alcanza. El mundo del hombre está hecho de sistemas de notación numérica para expresar todo tamaño de conjunto de elementos.

Parece sorprendente que grandes cantidades pueden ser codificadas por números pequeños en forma exponencial. El mundo de los números decimales se nos enseñó en la primaria o secundaria y se nos habló que hay números pares especiales, nones y primos. Un número es primo si es mayor que 1 y no el producto de números más pequeños. Así los números primos son un natural mayor que uno, que tiene únicamente dos divisores distintos, del mismo y el uno. El número 1 no es primo por acuerdo, no es un número compuesto. Los números compuestos tienen divisores además de sí mismo y el del 1, por ello pueden ser representados en forma factorizada por números primos y solo el 2 es el único número primo par. Podemos definirlos como un entero positivo que tiene exactamente un divisor entero positivo distinto de 1.

2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

Hay infinitamente muchos números primos y parece relativamente fácil encontrar los más grandes. Por ejemplo, apoyándonos en la Web de Wolfram Alpha:

De este modo

el siguiente número primo de $10^{10} = 10^{10} + 19$,

el siguiente número primo de $10^{20} = 10^{20} + 39$,

el siguiente número primo de $10^{40} = 10^{40} + 121$, el siguiente número primo de $10^{50} = 10^{50} + 151$,

el siguiente número primo de $10^{100} = 10^{100} + 267$,

el siguiente número primo de $10^{1000} = 10^{1000} + 453$.

Así es fácil encontrar números primos por lo menos con 1000 dígitos. Aún más sorprendente, podemos probar cualquier número de 1000 dígitos y encontrar cual es el primer primo que le sigue. La sorpresa no es solo que es factible reconocer números primos grandes, sino que es factible reconocer números no primos sin encontrar sus factores. Al parecer, es más difícil encontrar factores que demostrar que existen. Estos descubrimientos recientes sobre los números primos y la factorización subrayan la naturaleza de los misterios de la aritmética elemental. La multiplicación puede ser difícil, es evidente que una comprensión completa de la aritmética elemental no es tan fácil como parecía en la escuela primaria. Algunos puntos de vista requieren conocimientos de orden superior para aclarar este pensamiento matemático.

Computación

Como vimos en el tema anterior, trabajar con números decimales requiere de algunas habilidades computacionales no triviales, incluso para sumar, restar y multiplicar números enteros. Las reglas o algoritmos, para sumar, restar y multiplicar números decimales son lo suficientemente conocidas en el bachillerato, por lo que consideramos no son necesarias describirlas aquí. Pero es bueno recordar que participan muchos hechos, en las sumas y productos de posibles números de dos o más dígitos, una es necesaria para alinear los dígitos correctamente en el acarreo. El aprendizaje y el entendimiento de estos algoritmos son un logro importante. Sin embargo, generalmente se asume que los algoritmos de suma, resta y multiplicación son dados casi de manera natural. Una razón es que son rápidos, los algoritmos decimales son eficientes para cualquier caso. Tales algoritmos se han conocido desde la antigüedad, antes que se inventara el sistema decimal. El ejemplo más claro es el algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de dos números, toma dos números enteros positivos, comencemos por ejemplo con el par 13, 8

$$
\begin{aligned}
13,\ 8 &\rightarrow 8,\ 13-8=8,5\\
&\rightarrow 5,\ \ 8-5=5,3\\
&\rightarrow 3,\ \ 5-3=3,2\\
&\rightarrow 2,\ \ 3-2=2,1\\
&\rightarrow 1,\ \ 2-1=1,1
\end{aligned}
$$

En el momento en el que dos números son iguales y el algoritmo se detiene. La número 1, de hecho es el máximo común divisor (mcd) de 13 y 8, pero ¿Por qué se debe producir el mcd de esta manera? El primer punto es: si un número **d** divide dos números **a** y **b**, entonces d también divide **a-b**. En particular, el máximo común divisor de **a** y **b** es un divisor de **a-b**, y por lo tanto, de todos los números producidos por la secuencia de restas. El segundo punto: la sustracción continua disminuye el máximo miembro de la pareja, y por lo tanto el algoritmo eventualmente se detiene, necesariamente con un par de números iguales. De esto se desprende que el número de terminal es igual al mcd de la pareja inicial.

El algoritmo euclidiano es un proceso rápido en términos de el número de secuencias de proceso necesarias para llegar al resultado. Si los cálculos fueran dados en números decimales, y si remplazamos reiteradamente las sustracciones de **b**, dado por la división de **a** por **b** con el remanente, entonces el número de divisiones necesarias para obtener el MCD (**a,b**) es aproximadamente al número total de dígitos en el par inicial.

En 1937 Lothar Collatz, desarrolla un algoritmo que esta en el contexto de la aritmética elemental. Se aplica a números enteros positivos, si el número es par, se divide entre 2; caso contrario si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1.

f(n):

Si n es par: $n/2$

Si n es impar: $3n+1$

Con esta función Collatz nos dice que siempre se alcanza el 1.

Dado un número arbitrario, creamos sus órbitas, y por órbita entenderemos los números sucesivos al iterar la función, por ejemplos para n=13

f(13)= 13x3+1=40

f(40)=40/2=20

f(20)=20/2=10

f(10)=10/2=5

f(5)=5x3+1=16

f(16)=16/2=8
f(8)=8/2=2
f(2)=2/2=1
f(1)=3x1+1=4
f(4)=4/2=2
F(2)=2/2=1
…
El ciclo se repite indefinidamente 4,2,1 es una órbita periódica. Una órbita es una clase de conjugación del elemento **n**. Para el caso n=6, la órbita es 6,3,10,5,16,8,4,2,1. Esta sucesión esta acotada. Hasta 2005 se demostró que esta función es valida para números menores de 2^{58} . Este algoritmo tiene la promesa de que alcanzaremos el 1 para cualquier n con el que se comience. Aún no está demostrado formalmente, pero este desafío resulta emocionante.

Hace apenas cien años, por la falta de una teoría de algoritmos, se acogió el problema de Collatz como un concepto de algoritmo computacional. Pero es hasta 1970 que la teoría computacional se le presento un hito, algunos cálculos no se pueden realizar en la práctica, a pesar de que existen en principio, por ejemplo, la exponencial de números extremadamente grandes. Esto condujo a una luz para todo el campo de la computación y de hecho a una revalorización matemática que involucra el cálculo a partir de la aritmética. Ya hemos dicho que al parecer, es más difícil encontrar factores que demostrar que existen para los números primos. Este hecho resulta contrario para los que suponen la existencia de un objeto matemático, implicada al poder encontrarlo.

Estos ejemplos de matemática elemental nos muestran que, lo elemental no es para nada una computación aritmética simple, por contrario nos demuestra la complejidad de sus irresueltos, el por qué la propia aritmética es un campo de teoría matemática de enorme desafío. En resumen, lo elemental como sinónimo de aritmética, se tambalea con la existencia de una aritmética modular, teoría de grupos, anillos y otros conceptos de enorme aplicación científica, tecnológica, militar y recientemente en los fractales observados en cuentos y novelas de grandes escritores[33].

Álgebra

El álgebra es un campo asombrosamente dinámico en su cambio, los estudiantes generalmente tienden a expresar por álgebra a las operaciones con polinomios, resolver sus ecuaciones hasta tercer grado y realizan cálculos de determinantes, reducciones de expresiones racionales y el estudio de las curvas asociadas a estos polinomios, la reconocen en libros de pre-cálculo. Aunque en nuestros días, el álgebra computacional gana enormes aplicaciones, se le suele marginar de ser un elemento de matemática elemental. Definir un álgebra como un cuerpo o campo cerrado bajo una operación binaria, es referirnos a ella de manera formal. Un álgebra aritmética su cuerpo es hecho de números reales, un álgebra arábiga de polinomios, una compleja de números complejos, una integral de familia de funciones, una lineal de matrices, …, todas ellas se les identifica por cumplir con alguna estructura de axiomas tales como la conmutación, la asociativa, la distributiva, el elemento neutro y el inverso simétrico. En consecuencia todos los ejercicios algebraicos se desprenden de estos axiomas:

$$
\begin{aligned}
&a+b=b+a\\
&a+(b+c)=(a+b)+c\\
&a+0=a\\
&a+(-a)=0\\
&a(b+c)=ab+ac\\
&ba=ab\\
&a(bc)=(ab)c\\
&a\bullet 1=a\\
&a\bullet a^{-1}=1
\end{aligned}
$$

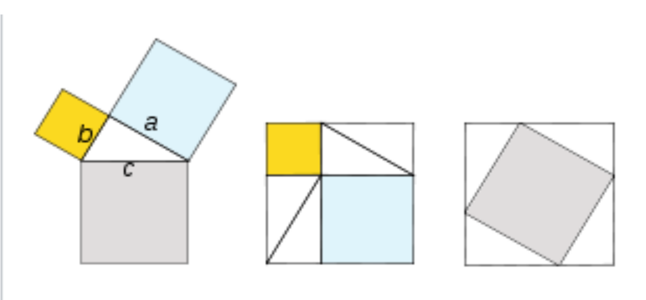
El objeto de aprender cualquier álgebra, por error se confunde en la educación como resolver cientos de miles de ejercicios, como un modo de comprenderlo como un sistema de axiomas de cerradura, es decir, que encapsulan cualquier resultado dentro de su propio cuerpo o campo. Los axiomas suelen ser estos últimos nueve citados en lineas atrás. El error es que suelen los estudiantes quedarse solo en ejercicios y dejan de ver el panorama del poder de estos sistemas axiomáticos, o comúnmente en la matemática formal se les llama campos o cuerpos. En cuanto algo cumple con estos nueve axiomas se les llama campo, y la teoría de campos es la rama que estudia al álgebra. El primer campo que conocemos está hecho de números reales, el segundo de polinomios, el tercero de complejos, el cuarto de funciones, el quinto de vectores, el sexto de matrices, …, y cada uno es un terreno único en sus posibilidades científicas y tecnológicas.

En el siglo XX se desarrollaron muchos sistemas encapsulados en apoyo computacional a la criptografía comercial, militar y científica. El dinero electrónico y las transacciones comerciales en la Internet no pueden ser posibles sin este robusto cuerpo de conocimiento. Es cierto que no todas las álgebras cumplen con los nueve axiomas ya referidos, este problema escapa a la intención de este texto, pero téngalo presente, las matemáticas modernas casi todo lo refieren a estos sistemas axiomáticos. ¿Quién hubiera pensado que casi todo el vasto mundo de las matemáticas es desprendido de estos axiomas básicos?

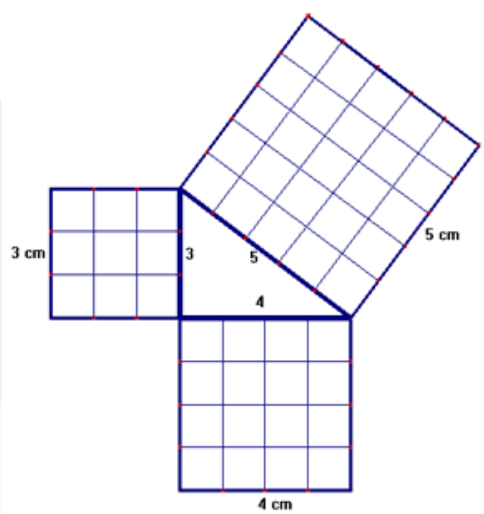
Pero hay otras estructuras algebraicas, por ejemplo, si un álgebra no cumple con el axioma del elemento inverso simétrico a^{-1} la llamaremos a ese campo anillo (permite la existencia de fracciones, el producto en un anillo no necesariamente tiene operaciones inversas). El primer anillo que todos conocemos es el sistema de números enteros. Los números naturales (enteros positivos) no son un campo ni anillo. No queda muy claro por qué los números racionales y enteros Q y Z, son más útiles que los naturales, puesto que todas las propiedades de los números enteros o racionales se heredan de los enteros positivos. Quizá la razón sea que tienen mejor estructura algebraica en su cuerpo axiomático, en algún sentido. El anillo parece ser un buen escenario para discutir temas como la divisibilidad y los números primos, mientras que la estructura del campo es buena en geometría.

Geometría

Sin duda la geometría ingresa con fuerza en las matemáticas con el teorema de Pitágoras. Este teorema afirma que el cuadrado debajo de la hipotenusa **c** de un triángulo rectángulo es igual (en área) a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

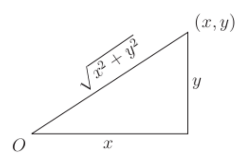


Los cuadrados compuestos en el centro y a la derecha tienen áreas equivalentes. Quitándoles los triángulos el teorema de Pitágoras queda demostrado.



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pitágoras

El teorema es apenas obvio, la prueba se muestra arriba en la figura, los cuadrados perfectos formados en completo a los cuadros por **a** y **c**. La respuesta a los axiomas de Euclides en su libro *Elements*, se consolida con el teorema de Pitágoras. Este enfoque, hace unos 100 años, los matemáticos consideran que el rigor y universalidad del sistema de axiomas Euclidiano no rellena algunos huecos vacíos de la geometría. El requerir una gran cantidad de nuevos axiomas adicionales y el hecho que hay otra geometría que requiere modificar el sistema de axiomas.



Nos parece que el enfoque axiomático debe ser abandonado en la geometría y esta debe basarse en el enfoque algebraico iniciado por Descartes en el siglo XVII. En geometría algebraica, los puntos en el plano se dan por pares ordenados (**x,y**) de números y líneas curvas son expresadas por ecuaciones polinómicas en **x** y **y**. Desde el punto (**x,y**) se encuentra la distancia horizontal **x** y la vertical **y** desde el origen 0. Nosotros definimos la distancia como:

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

motivando que el teorema de Pitágoras.

Un círculo de radio unidad, que consiste en los puntos a distancia 1 hasta 0. Tiene la ecuación
$x^2+y^2=1$

Mas generalmente, el círculo con centro en (**a,b**) y radio **r** tiene la ecuación
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

El problema con este enfoque algebraico es que va demasiado lejos, no hay ninguna restricción natural en las ecuaciones que precise los conceptos geométricos de Euclides. Si nos detenemos en estas ecuaciones lineales obtenemos solamente líneas; si lo hacemos para las cuadráticas obtenemos todas las cónicas, hipérbolas, elipses y parábolas. Mientras que con Euclides solo círculos. Sin embargo, hay un concepto algebraico diferente que surge, y que refiere a un lugar en el espacio geométrico: el concepto de vector, y nuevos productos tales como el producto interno y el producto cruz. Si bien no da la generalidad del espacio vectorial, en su lugar describe el espacio vectorial R^2 que es conveniente para la geometría plana euclidiana.

Se nos permite agregar una nueva regla:
$(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$
Y para multiplicar a un par por cualquier número real **c** utilizamos la regla de:
$c(x,y)=(cx,cy)$

Estas operaciones tienen interpretación geométrica natural: adición (a,b) a cada (x,y), significa trasladar el plano; es decir, cambiando todos sus puntos a través de la distancia horizontal **a** y distancia **b** vertical. Multiplicando cada (x,y) por el factor **c**, aumenta el plano entero por el factor **c**. Como veremos este ajuste simple prueba algunos teoremas geométricos interesantes. Pero para capturar todos los de la geometría de Euclides tenemos un ingrediente adicional: el producto interno, llamado también producto punto, definido por

$$(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$$

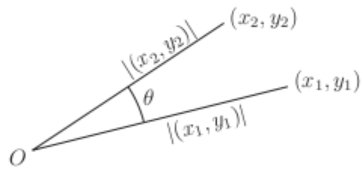
Note que:
$(x,y)\bullet(x,y)=x^2+y^2=\left|(x,y)^2\right|$

Donde (x,y) denota la distancia de (x,y) desde el origen O. Por lo tanto, el producto interno puede ser definido como la distancia de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Una vez que tenemos el concepto de distancia, también podemos obtener el concepto de ángulo, porque resulta que
$(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=\left|(x_1,y_1)\right|\left|(x_2,y_2)\cos\theta\right|$

Donde θ es el ángulo entre

(x_1,y_1) y (x_2,y_2)

Como se muestra enseguida:



Las principales ventajas de utilizar el concepto de un espacio vectorial con el producto interno, en lugar de los axiomas de Euclides, son la familiaridad y universalidad. Las reglas para calcular los vectores son similares al álgebra tradicional; también, el producto interno y los espacios vectoriales ocurren en muchas partes de las matemáticas, por lo que vale la pena aprenderla como herramienta de uso general. En resumen, hay otras geometrías distintas a la Euclidiana, por ejemplo la hiperbólica en la que el postulado de las rectas paralelas de Euclides es falso, los ángulos de un triángulo no suman Pi y para una figura de un tamaño dado, no existe otra semejante de tamaño mayor.

Cálculo

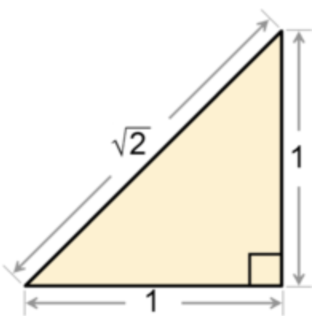
El cálculo difiere de la aritmética elemental, el álgebra y la geometría de una manera crucial, el hecho de la presencia de procesos infinitos no lo advierte. Tal vez, el abismo entre finito e infinito es tan profundo que debemos utilizarlo para separar lo elemental de lo no elemental en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, esto no debe ser así, El propio Euler escribió sobre procesos infinitos sin mencionar a la derivada o integral, se le refiere como pre-cálculo.

Así, probablemente no sea prudente excluir el infinito de las matemáticas elementales. La pregunta es si el infinito debe ser explorado antes del cálculo, mediante series infinitas (procesos infinitos), o después. En nuestra experiencia hay mucho que decir, primero al mirar en el infinito. La serie infinita se presenta naturalmente en la geometría o la aritmética elemental, y de hecho fueron utilizadas por Euclides y Arquímedes antes que Newton inventara el cálculo. También antes del cálculo, en un margen histórico, fue introducido el concepto de infinitos decimales por Stevin 1585. Decimales infinitos son un tipo particular de series infinitas, es una ampliación del concepto de fracción decimal, por lo que probablemente es el proceso infinito más accesible a los estudiantes del siglo XXI.

Un decimal infinito surge de cualquier fracción ordinaria cuando intentamos convertir la fracción a decimal, por ejemplo 3/7 =0.428571428571428571… es decir, con cualquier fracción irreductible. Pero hablar de fracciones a menudo representa una dificultad profunda en la mente de los estudiantes, en consecuencia, su imaginación tiene un callejón sin salida. El docente puede recurrir a lo hipotético dentro de las matemáticas, necesita en verdad serenidad, la clave para reconocer este conocimiento es no quedarse en el puramente lógico, la intuición debe tocar primero este problema.

Los objetos matemáticos, son estructuras ideales, es decir, sin contradicción lógica. La precisión de los modelos matemáticos los prefiere la ciencia y la técnica en su búsqueda de verdad y eficacia respectivamente. Decir que una proposición matemática es objetiva por ser verdadera, entonces existe en el mundo platónico. La existencia platónica no está sujeta al tiempo-espacio material, es parte de nuestra mente, una conexión a un mundo artificial o sí gusta llamarlo virtual, en el que a partir de principios matemáticos comunes a nuestra especie, todo allí es coherente, preciso, bello. No hay objetos matemáticos fuera de la razón y la intuición. No es que nuestra mente posea un programa computacional único de la especie, capaz de reconocer a partir de axiomas la verdad, es en principio la intuición formada de axiomas innatos a nuestra biología, lo que da significados evidentes a lo verdadero. La belleza de la matemática es que sus enunciados platónicos revelan la magia oculta en estructuras superiores de la matemática. La estética es dada en teoremas o demostraciones. Las demostraciones son esas imágenes estéticas del mundo platónico.

Una fracción ya se ha dicho que es un número racional expresado por la razón **a/b** donde **a** y **b** son enteros diferentes de cero. Son estos números cantidades finitas simples, pero insuficientes para hacer geometría. Para la geometría hemos dicho, se necesita de los irracionales, esos números de cantidades decimales infinitas, de hecho, muchas diagonales o hipotenusas no es posible determinar su longitud con números finitos, por ejemplo la raíz cuadrada de dos.



Este número es descrito en forma decimal por una sucesión infinita, a pesar que nuestra calculadora electrónica devuelve un número finito aproximado; pero para ser platónico este debe existir. Las fracciones irracionales cuando se expresan en decimal, en sus secuencias de

números, aparecen ráfagas de secuencias finitas que se repiten infinitamente, a estos se les llama irracionales cuadráticos.
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$

Estimado lector, pero Usted se preguntara por qué ampliar el pensamiento matemático cuando el estudiante promedio no puede realizar operaciones aritméticas con números fraccionarios. Creemos que estos estudiantes han sufrido a manos de otros profesores o sus tutores, el tormento de estas operaciones. Manipular fraccionarios del tipo **a/b** tal vez, No comprendan lo que es una fracción. Problemas de encontrar el factor común en el numerador y el denominador de un racional ordinario causó en los estudios de primaria un trauma, se intentó relacionar las fracciones con algunos ejemplos de la realidad física.

¿1/4 qué clase de número es? Muchos lo refieren como una fracción, donde el par ordenado 1 y 4 son enteros. Y 8/32 es el mismo número que la fracción 1/4. Podemos decir que un par ordenado (1,4) es el mismo (8,32). Podemos sugerir que es cuestión de simplificación. Pero todavía no sabemos muy bien que es una fracción, es un número de un par ordenado de enteros que cumplen con el sistema axiomático de un álgebra. Una fracción es una **clase infinita de pares**, que cuando se suman las veces de unidad fracción sobre las del denominador se llega al uno, por ejemplo:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1$$

Su cantidad equivalente de un número fraccionario, es
$$\frac{a \times n}{b \times n}$$

Donde **n** es un factor entero distinto de cero que permite conocer todos los pares ordenados de la clase **a/b**.

Así pues, en resumen, saber que es una fracción y cómo este número es parte de un campo o sistema axiomático o si lo prefiere llamar simplemente álgebra aritmética; y que además puede ser sumado, restado, dividido, multiplicado, factorizado, operado por su inverso simétrico, bajo las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, simetría inversa. No es cosa, que se aprende haciendo miles de ejercicios de fraccionarios. Esta colección infinita de pares, la hemos definido como un fraccionario, y este es el desafío verdadero del pensamiento matemático y no la ingenua tarea de aplicar miles y miles de ejercicios de fraccionarios, misión que a todas luces solo logra traumas a los estudiantes. Y buena parte de pensar las matemáticas es algo parecido a lo hecho aquí para explicar lo que es una fracción.

Muchos dicen que las operaciones con fracciones son el coco de los estudiantes de matemáticas en México. Muchos heredan a las nuevas generaciones este miedo al "sufrimiento" de la aritmética de fracciones, en la pubertad se agudiza con solo mencionarlo en el aula que gime, suspira y se desploma de hombros. ¿Por qué? Así que la sensación es que son algo difíciles. ¡El mirar esto aterra!

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{17}+\frac{137}{1234}=?$$

La expresión parece muy difícil…!que es imposible¡ El alumno no puede y le es desagradable. Así que empecemos con una más sencilla.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=?$$

Uff¡¡¡ La mayoría podría lentamente saber el resultado. Realmente es más sencillo el cálculo. De hecho, con manzanas o rebanadas de pasteles puede hacerse. Entonces, ¿qué es lo que hace incomodo a las fracciones? Recuerdo a un estudiante de 17 años, sentado en el aula, cuando se les pidió que sumara dos fracciones con mismo denominador.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=?$$

Por qué este estudiante volteó a ver como desesperado a otros a su lado, dijo por qué estás tienen el mismo denominador, qué quiere decir pregunto. Entonces se le dijo que era igual a sumar peras o manzanas de la aritmética simple, "no pienses en el fraccionario como un medio, sino como un número cuya cantidad que representa es la mitad de la unidad". La mayoría de los docentes introducen el concepto de fracción como la idea de repartir, si es justo la repartición será en partes iguales y si no es justo se desequilibrará la repartición. A las partes repartidas se les llama fracción. Estas piezas para sumarlas, dividirlas, multiplicarlas o controlar su mínimo común denominador; el docente las expresa como técnicas y nada más, e aquí el error, se deben aprender las técnicas en un contexto de aplicación a un problema. Una vez que son intuitivas, es posible pasar al rigor de la técnica.

Se aprenderán palabras como un sexto, tres medios, un séptimo,… Estas palabras tendrán el significado cuantitativo de un número fraccionado. Las propias operaciones, el estudiante las debe ver como respuesta lógica al resultado buscado. La siguiente es respetar la notación de las fracciones. Es extraño, pero una fracción es un número **a/b**, **a** como numerador y **b** denominador. Pero la mente distraída rápidamente lo observa como dos números. ¿Entonces que es una fracción? La definición más común es que es una parte de un todo. Un todo resulta complicado sin la idea de mónada, esa unidad presente en cada capa de la realidad, esa misma que permite contar en ella sus unidades. Una mónada es: un universo, una estrella, un planeta, un continente, una isla, un árbol, un hombre, una molécula, un libro, un estudiante. Una unidad es un todo y rápidamente la idea de mónada esta resuelta. La cosa es, sin embargo, una mónada o unidad divisible en piezas, cada pieza es una fracción de la mónada, tales como

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\dots$$

Pero 3/5 resulta un salto mental enorme. ¿Por qué? Bueno, 1/3 es una parte de algo más grande. ¿Pero y 3/5 ? Es tres partes de algo dividido en cinco? Tal vez ambas intuiciones son verdad, la diferencia puede parecer poco importante, pero es fundamental aprender a imaginar esto. Un pastel dividido en 7 partes, si me tocan 3 de ellas, tendremos para nosotros 3/7 de pastel. Imaginar un cambio así, requiere que el profesor en principio introduzca el contexto del empleo de estas dos nociones desde el mundo real. La falta de referencia sobre la idea de un número fraccionario extravía el sentido de las técnicas aritméticas de estos números. Lo que nos lleva al siguiente punto, los estudiantes necesitan visualizar un análogo sobre lo que están calculando. Cuando piensan qué fracción es mayor entre 2/3 y 2/7, su mente debe procesar que un cociente que expresa una mayor división representa una menor porción de un algo. Cuando se piensa una fracción determinada, se necesita reducirla a su mínimo equivalente, para poder visualizar la cantidad que representa, por ejemplo 2/7   2/20 9/10 13/33 , ¿cómo mentalizarse cuál representa una mayor cantidad de un algo?.

Sin duda, que la mente puede evaluar los cocientes respecto al concepto de un todo o mónada. Pero, entrenar la mente para ello requiere discutir lo que es una mónada, y esto es justo lo que pierde de vista el docente. Fue el propio matemático Gottfried Wilhelm Leibniz el primero en observar este importante desafío mental.

Mónadas

El universo, no es otra cosa que estructuras de información organizadas a modo de energía. Einstein lo ve de esta manera $E=mc^2$, es decir, toda la materia es una forma comprimida de energía, masa y energía son la misma cosa. Para comprenderlo, se hace la consciencia con las matemáticas ontológicas, esas matemáticas que sus enunciados expresan algo equivalente a la realidad que refieren. Por ejemplo las mónadas definidas por la ecuación de Euler. Estas no son puntos en el infinito en el límite de la nada. Se trata de áreas, volúmenes, densidades, líneas. Euclides define a los puntos como lugares adimensionales, y es una revolución lo hecho por Newton, donde los puntos son mónadas con estructura dimensional y esto es fundamental y elemental para el nacimiento del cálculo derivativo e integral. Pero, ¿cómo puede un punto ser un área, un volumen, una línea? Es decir, ¿cuántos lados tiene este punto? ¿todos los puntos son creados iguales? ¿Este tipo de punto o mónada de Euler puede dividir cualquier cosa hasta el infinito, es decir, antes que la mónada sea cero?. Las mónadas tienen aveces un nombre más resonante: almas. Todos habitamos almas en el mundo, esencias maravillosas y singulares fuera del tiempo y el espacio: software. Nuestras almas son singularidades matemáticas individuales. Desde la óptica de Fourier, estas almas monádicas son un dominio de frecuencias único, el mundo material del espacio-tiempo es un producto combinado de Fourier: es decir, el universo entero está hecho de materia que vibra.

La información o punto de Euler trata de números, cuando Pitágoras refiere "todas las cosas son números", él estaba afirmando que vivimos en un universo de información. Leibniz fue el mejor heredero del legado matemático de Pitágoras, enunció su principio de razón suficiente, según el cual "todo lo que ocurre tiene una razón suficiente para ser así y no de otra manera".

Todas las cosas, decía Aristóteles citando a Tales de Mileto, su sustancia está llena de dioses, infinita, ilimitada sustancia que contiene un perfecto equilibrio racional entre el todo. Si bien para Pitágoras fueron números, en realidad nadie pensó en la materia reductiva hasta donde el mundo ha muerto, sin sentido mecanicista, en la frontera de la nada. Los pitagóricos juraban sobre el lema de la naturaleza que contenía la fuente y la raíz de la eternidad. Imagine un punto infinitesimal o un número decimal infinito, es decir, una fracción irracional, una singularidad, formada por infinitos puntos donde cada uno supera cualquier número de puntos donde cada uno de ellos ocupa un espacio físico. Desde esta singularidad (mónada suprema), infinitos puntos (mónadas individuales) pueden surgir para crear todos los objetos matemáticos del mundo platónico a través de sus diversas combinaciones y relaciones. Con esta noción de todo lo que vierte un punto adimensional (la nada), tenemos así un prototipo de la teoría del Big Bang matemático: todo el universo matemático está generado por puntos matemáticos (mónadas) que emanan de una singularidad fuera del tiempo y el espacio: la mente. Así que la ciencia es el demandante eterno de la imaginación matemática, sin ella, solo es un acto de fe.

Llegado a este punto. El sistema de Pitágoras tiene el punto matemático como unidad asociada con el número UNO o mónada, como elemento básico de toda su arquitectura matemática, todo lo demás se deriva de él. Sin embargo, esto no sirve sin vida, es decir, sin una mente, por lo tanto, el mundo de Pitágoras es el mundo de los objetos platónicos matemáticos, mentales y vivos. Así la ciencia de lo incorpóreo, de tautologías, de ficciones platónicas, de almas o mónadas de los objetos matemáticos, el intelecto se extenderá desde puntos adimensionales vía relaciones matemáticas a todo su universo.

De acuerdo al pensamiento Maya, lo equivalente a una mónada, es una frontera de indeterminación en aproximación infinita hacia la nada, una invocación indivisible en el infinito de la frontera de un existencial. La cuestión es si el **Cero Maya** es en una singularidad algo más inmediata superior sobre la nada, la unidad del corazón de la realidad, es decir, la energía, lo existente en el mundo, o podríamos decir, que el cero maya es la frontera del Big Bang de las estructuras de información del universo matemático.

¡Tenemos que hacer fracciones!, significa que es una competencia necesaria para el hombre moderno, que parte de su comprensión de número y cantidad entre los extremos del todo y la nada, y además, sus versiones irracionales decimales son un viaje infinito. Sin duda que es un desafío de lo conocido a lo desconocido. Los seres humanos discutimos, es decir, intercambiamos posturas sobre ideas y además, pretendemos en lo particular en la educación, que esta convenza que es capaz de hacer transitar a los estudiantes en por el camino virtuoso de pensar y gestionar conocimiento. No es muy profundo lo expresado aquí, lo que pasa es que la gente olvida hoy en día, que empezar, siempre es por lo intuitivo, es decir, proceptual-simbólico ya discutido en este texto. Los estudiantes tendrán que enlazar a partir de lo intuitivo una idea tras otra, y demasiado a menudo en las matemáticas son como las muñecas rusas, una idea contiene en su interior muchas más ideas. Los nuevos conceptos fuera de la mente del estudiante no están flotando en el aire o en poder de un Dios que sopla al oído, estas nuevas ideas están en la literatura, esos libros que siempre son generosos y están de buen humor. El docente guiará la experiencia por un camino de pensamiento productivo y resolverá todas las dudas respecto al rigor de este conocimiento.

En resumen, un número fracción, es un viaje infinito a la frontera de la nada, es un número que divide a la mónada para volverla analítica, en otras palabras, la acción de fraccionar el todo o mónada, es fundamental para la tecnología y la ciencia, de ello depende descomponer el micro cosmos es formas de estructuras de información manejable por los técnicos y científicos. Hasta aquí, lo que parece elemental como la definición de un número fracción, resulta que su concepto está relacionado con el infinito, la mónada, el infinitesimal, la clase equivalente, y todo un mundo dentro del manejo de la precisión en todo acto de medida físico. Así, que el terror de nuestros estudiantes sobre estos números está justificado, del mismo modo que su posibilidad de superarlo.

Así que, los decimales infinitos son familiares y a la vez que desconcertantes. A muchos estudiantes no les gusta la idea de considerar

1=1.9999999999999999999999999999 …,

Parece que esta igualdad es en realidad falsa, por ser menos que uno. Esto demuestra que el concepto de límite, probablemente debe ser discutido mucho antes que se aprenda cálculo. Justo antes de introducirnos al significado de infinitos decimales. En particular, es fácil poder demostrar que cualquier decimal infinito periódico representa un número racional, por ejemplo el número n=0.1371137113711371137113711371137113711371…, Podemos desplazar el punto decimal al multiplicar n por 1000:

n(1000)=137.1137113711371137113711371137113711371 …=137+n

Entonces, podemos resolver para n,

n=137/9999. Un argumento similar se trabaja con cualquier decimal en su última instancia periódica, tal como para n=0.3155555555555555555555 … ahora n(1000)=315.5555555 y n(100)=31.5555555555 …, así que (1000)n-(100)n=315-31, que significa (900)n=284 y por tanto n=284/900.

Por el contrario, cualquier número racional tiene un decimal periódico en la última instancia (tal vez en última instancia todos sean ceros). Esto es porque solamente los finitos tienen restos posibles en el proceso de división que producen así los sucesivos dígitos decimales, así que finalmente se producirá una repetición. Los decimales infinitos ya descritos arriba son ejemplo de la serie geométrica

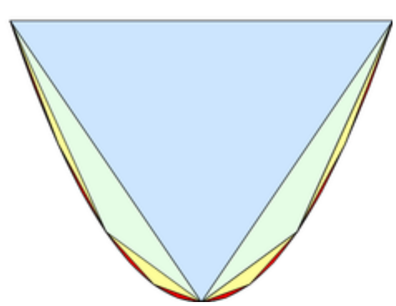
$$n+nr+nr^2+nr^3+\dots \quad con \quad |n|<1$$

Por ejemplo: para 1/3

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\dots$$

Que tiene n=1/3 y r=1/10. No hay ninguna razón convincente para llamar a esta serie como geométrica, pero se presenta en geometría. Uno de los primeros ejemplos fue dado por Arquímedes: encontrar el área de un segmento parabólico. Este problema, que hoy resolvió el cálculo, puede reducirse a la suma de una serie geométrica como sigue.

La idea es llenar el segmento parabólico con infinitos triángulos y sumar sus áreas. Resulta que, con una simple suma se construye una serie geométrica. El primer triángulo tiene dos vértices en los extremos del segmento parabólico y su tercer vértice en la parte inferior de la parábola. Los dos triángulos se encuentran en los dos lados menores del primer triángulo, con sus vértices sobre la parábola en lo horizontal a medio camino entre los primeros y así sucesivamente.



La anterior figura muestra las etapas de este proceso, de llenado de triángulos para la parábola, $y=x^2$ entre x=-1 y x=1. Obviamente, que el primer triángulo, tiene área 1. Puede comprobarse con facilidad, que los siguientes 1/8 cada uno, para juntos sumar 1/4. Los siguientes cuatro tendrán un área de 1/42 y así sucesivamente. Por lo tanto, es el área del segmento parabólico

$$A=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots$$

Podemos encontrar A multiplicando ambos lados de esta ecuación por 4, obteniendo

$$4A=4+1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots$$

Donde sigue por sustracción que

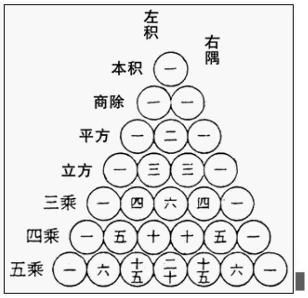
3A=4 por tanto A=4/3

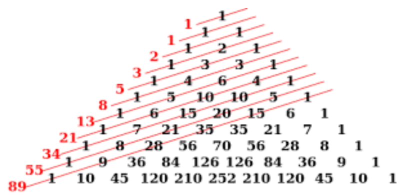
Esto demuestra que, con poco ingenio, un problema normalmente resuelto por integración se reduce a la suma de una serie geométrica. En particular esto resulta muy relevante para las series

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Combinatoria





$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

En la figura anterior se expresa el Zhu Shijie (1303) chino y el triángulo de Pascal (1654) en sus formas de binomio y numérica. La idea combinatoria probablemente nace en china y es perfeccionada por Pascal, se muestra con números chinos, arábigos y en su forma binomial. Se cree que surge el binomio (a + b), como los números en el (n+1) que en el triángulo se llaman coeficientes del binomio. Se denotan como

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\dots,\binom{n}{n}$$

Mirando hacia atrás en el triángulo de números arábigos, se observa cada coeficiente binomial

$$\binom{n}{k}$$

En la fila (n+1) es la suma de los dos de arriba

$$\binom{n-1}{k-1}$$ y

$$\binom{n-1}{k}$$

En la fila n. Esta famosa propiedad de los coeficientes binomiales se explica fácilmente a través del álgebra. Si tenemos por ejemplo:

$\binom{6}{3}$ = Coeficiente de a^3b^3 en $(a+b)^6$

Por otro lado

$$(a+b)^6 = a(a+b)^5 + b(a+b)^5$$

Así que hay dos maneras que a^3b^3 se representen en $(a+b)^6$: el primer término, como $a \cdot a^2b^3$, y el segundo término como $b \bullet a^3b^2$ debido a esto

$\binom{6}{3}$ =Coeficiente de a^2b^3 en $(a+b)^5$ + coeficiente de a^3b^2 en $(a+b)^5$

$$\binom{6}{3}=\binom{5}{2}\binom{5}{3}$$

Esta idea nos acerca a la combinatoria, porque consideramos como a^3b^3 términos que se presentan como combinaciones de términos

$a(a+b)^5$ y $b(a+b)^5$

Ahora vamos al realizar la combinatoria y considerar como a a^kb^{n-k} términos de los factores numéricos n a + b en $(a+b)^n$.

Para a^kb^{n-k} hay que elegir a de k de los factores y b de los restantes factores de n-k. Así el número de términos es

$\binom{n}{k}$ = Número de maneras de elegir elementos de **k** de un conjunto de **n** elementos.

Como recordatorio de este hecho, pronunciamos el símbolo $\binom{n}{k}$ como **n** elegidos de **k**. La interpretación combinatoria nos da una fórmula explícita para, es decir:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Para comprender el por qué, imagine hacer una secuencia de **k** elegidos de un conjunto de **n** elementos.

El primer elemento se puede elegir de n-1 maneras, entonces n-1 permanecen elegibles, a continuación el segundo elemento puede elegirse de n-1 maneras, y n-2 elementos permanecen. El siguiente elemento elegido es sobre n-2 maneras, y n-3 elementos permanecen. Finalmente, el k elemento puede ser elegido de n-k+1 maneras.

Así de este modo n(n-1(n-2)… (n-k+1) son las secuencias de decisión. Sin embargo, nosotros nos preocupamos sobre el orden en que los elementos son elegidos, finalmente, se obtuvo solo el conjunto de elementos k, así que tenemos que dividir por el número de maneras de arreglar k elementos en una secuencia. Este número, por el argumento

$$k! = k(k-1)(k-2)\ldots 3\bullet 2\bullet 1$$

Se trata de cómo llegamos a la fórmula para el coeficiente $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ binomial arriba descrito.
Con esta evaluación de los coeficientes binomiales, se define como los coeficientes de la expresión de $(a+b)^n$, así de esta manera obtenemos el llamado teorema del binomio:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\bullet 2}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Empleando a=1 y b=x

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\bullet 2}x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

Ahora tenemos dos maneras de computar los coeficientes

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ Por las formulas ya explícitas y por el triángulo de sucesión de filas de Pascal. También tenemos un encapsulado de la secuencia de

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

Como los coeficientes en la expresión de

$(1+x)^n$

Una función de $(1+x)^n$, que encapsula una secuencia de números como los coeficientes de potencias de **x**, es llamada una función generadora de la secuencia binomial de coeficientes $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$. En muchos casos estas secuencias son infinitas. Se entiende por combinatoria, como un cálculo, basado en la teoría de series infinitas. A la combinatoria se le suele referir como matemática finita porque, al menos en el nivel elemental, se trata de objetos finitos, así que para probar cualquier cosa sobre estos objetos finitos es necesario demostrar algo que esta en el infinito. Esta es la razón última del por qué las matemática elementales no pueden excluir el infinito.

Probabilidad

La probabilidad es la formalización del estudio de la noción de incertidumbre. Los efectos del azar son evidentes en la realidad. Biológicamente, somos una mezcla al azar de los genes de nuestros padres. Muchos intuitivamente referimos a la probabilidad, como un valor que revela la posibilidad de ocurrencia. La vida del hombre es presionada por la consciencia, cuando se pregunta por las consecuencias de sus actos, por la posibilidad de acertar sobre sus apuestas a hechos futuros. Cada vez que referimos a la frase "la probabilidad es…", se hace referencia a los supuestos. Si esas suposiciones son injustificadas, es decir, que contienen poca dependencia de las variables que determinan los eventos. En un sentido clásico objetivo, la probabilidad es referida a juegos de azar, si se trata de eventos con misma probabilidad les llamamos simétricos en proporción a los resultados que los favorecen. Cuando hacemos experimentos de lanzar un dado, esperamos resultados igualmente probables en sus repeticiones de frecuencia. En realidad el dado no es ideal, por ello es razonable esperar ciertas desviaciones en su frecuencia. Entenderemos por frecuencia al número de repeticiones experimentales en condiciones idénticas. Una probabilidad es solo una expresión de la hipótesis de que algo ocurra, basada en la experiencia y el conocimiento sobre el experimento. Se trata de un número no negativo, no mayor a uno y donde cero es 0% y 1 el 100%. El cero representa el extremo como lo imposible, y el uno como el evento seguro o determinado absoluto. Cuando un asunto es incierto, es mejor evaluar sus probabilidades, para con estas tomar decisiones sobre nuestros pasos en la vida. Una frecuencia pretende hacer frente a circunstancias que suelen ser repetidas indefinidamente bajo idénticas condiciones. El número de resultados de un experimento no tiene que ser finito siempre, desde luego que de acuerdo con al segunda ley de la termodinámica, las condiciones experimentales no pueden ser absolutamente idénticas, se podría decir que la probabilidad es menor al 99% si el error experimental es inferior 2%. Las circunstancias de cada experimento solo se presentan en lo absoluto una sola vez desde un enfoque objetivo. Para fines de un cálculo práctico, se suele pensar a la probabilidad en circunstancias ideales, donde las frecuencias son manejadas como un argumento estable o que no cambia. Solo los extremos de la probabilidad pueden ser probados, un valor cero puede ocurrir si se prueba que el evento no puede ocurrir. Del mismo modo, una probabilidad de valor uno, corresponde al evento que se produce cada vez que se experimenta como algo invariable. Estos valores cero y uno, son los únicos que pueden ser concluyentes al ser probados experimentalmente. Si ocurre el evento, su probabilidad no puede ser cero y no puede ser la unidad si se aprecia algún otro evento distinto.

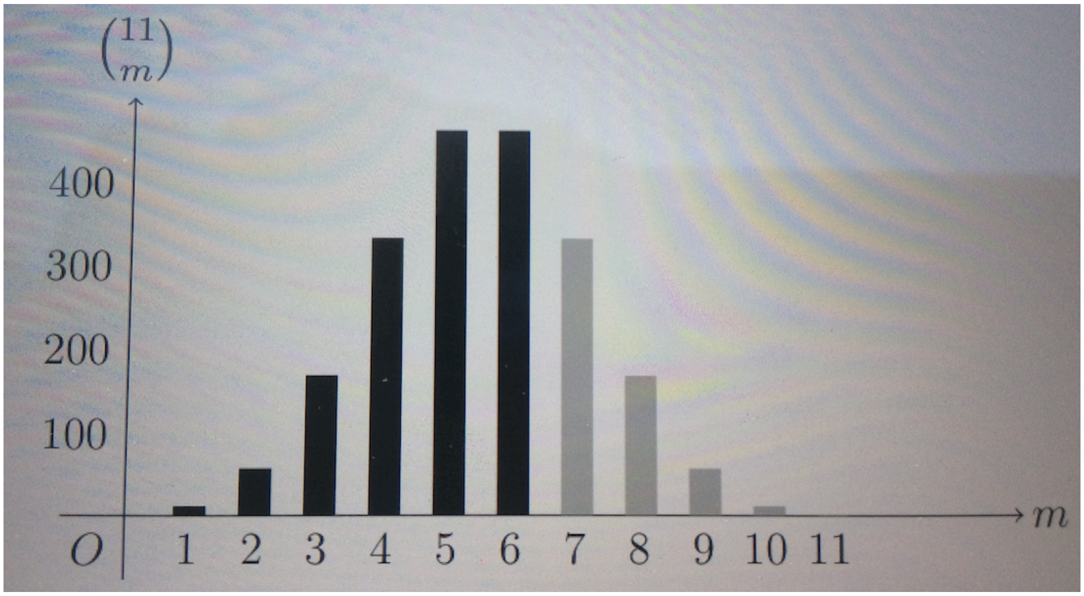
Los antecedentes de la probabilidad formal, se refieren a Pascal en 1654 como quien aporta la primera teoría matemática de la probabilidad. Los problemas de juegos de azar son reducidos a un problema de combinatoria: ¿en cuántas formas $\geq k$ cosas pueden elegirse de un conjunto de **n** número de cosas?

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}$$

Por lo tanto, el coeficiente de probabilidades, es la proporción en que debe dividirse la apuesta, es:

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}:\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{n}{0}$$

Pero incluso para valores moderados de n y k, esta relación sería difícil de calcular, o incluso de expresar simplemente, sin los coeficientes binomiales. Supongamos por ejemplo una n=11 y k=7.



Los valores de $\binom{11}{m}$ para m=0 hasta 11. Van desde el valor 1 hasta el 462, con estos para $m \geq 7$ mostrados en gris. Así la relación en este caso será la relación entre el área gris y negra. Y de hecho:

$$\binom{11}{7}+\binom{11}{8}+\binom{11}{9}+\binom{11}{10}+\binom{11}{11}=330+165+55+11+1=562$$

La suma de todos los coeficientes $\binom{11}{k}$ es $(1+1)^{11}=2^{11}=2048$, así que el otro lado de la relación es 2048-562=1486. Así, en este caso, 562/2048 para el jugador I, y 1486/2048 al jugador II.

Con valores mayores de n y k los coeficientes binomiales rápidamente se convierten en más grandes; de hecho, su total 2^n, crece exponencialmente. Sin embargo, algo interesante sucede con el aumento de los números. La forma de la gráfica de coeficientes binomiales, cuando escalan adecuadamente en la dirección vertical, se aproxima a una curva continua:

$$y=e^{-x^2}$$

Esta observación se analiza en la teoría de las probabilidades e implica al cálculo.

Lógica

Las características más distintivas de las matemáticas es que prueban lo que expresan a través de la lógica; aquí discutiremos solo la parte más simple de la lógica matemática. La inducción matemática, que es el principio más simple del razonamiento sobre el infinito. Inducción matemática también es conocida como la inducción completa en distinción al sentido coloquial de inducción, que a menudo es adivinación por experiencia. Las pruebas por inducción surgen de sumar uno de manera sucesiva a partir del cero para crear los números naturales, esta propiedad inductiva P, suele tener dos pasos básicos para la demostración:

1. Demostrar que P es coherente con cero (el paso base)
2. Demostrar que P propaga cada número al siguiente; es decir, si P es n, entonces P para n+1 (es el paso de inducción)

Obviamente, no es esencial empezar en 0. Si queremos probar que alguna propiedad P implica para todos los números naturales, digamos el 19 en adelante, el paso base será demostrar que P tiene al 19.

La inducción no solo es un método natural de demostración, a menudo es extraordinariamente eficiente, porque esconde los detalles de por qué P justifica para cada n. Solo tenemos que entender porque P tiene valor inicial, y por qué propaga para cada número al siguiente.

En general todas las personas consideran su propio pensamiento como lógico, de hecho, decir a alguien que su pensamiento es lógico es hacer crítica. La crítica es la actividad más distintiva de las sociedades abiertas y democráticas. Alguien ilógico, es referirlo como irracional en sus ideas. Al proceso de revisar las ideas en su lógica, es verificar (criticar) que no posean fisuras o incoherencias en su razonamiento. Razonar es intentar averiguar lo que está por tanto, justificado por un proceso lógico de para qué, por qué. Se producen afirmaciones en la ciencia, la ingeniería y son las matemáticas con sus inferencias las que dan luz de su solidez lógica. En cada caso se dan razones, llamadas conclusiones, que son las inferencias de las ideas que intentan convencernos de su verdad. La verdad es una validación por demostración, donde la idea central es extendida su validez por medios inductivos o deductivos.

Parece una tarea aburrida la crítica, pero es el ejercicio intelectual más importante para la soberanía de ciudadanos libres en sus juicios de conciencia. Pero resulta que esto no solo es asunto asunto complejo, sino que no puede desvincularse de hechos básicos sobre pruebas de validez. Debemos distinguir entre tres tipos de validez:

1. Si el plagiador simuló un texto, habría un mismo orden en el flujo de las ideas; así que el escriba no simuló e incurrió en plagio de autoría.

2. Ricardo tiene pintura en las manos; así que él es un pintor.

3. Ricardo compró una lata de pintura al día; por lo que alguien dejó un flujo de ideas idéntico a un texto protegido por derechos de autor.

La primera premisa es muy sencilla. Si la simulación es cierta, así debe ser la conclusión sobre el plagio. O, dicho, de otra manera, el plagio no podría ser verdadero, sin comprobar el mismo flujo de las ideas. Este es una inferencia de validez deductiva. En la número dos, la inferencia es un poco más diferente, la premisa es claramente la razón para la conclusión. Pero no es totalmente concluyente. Después de todo, Ricardo simplemente podría haber manchado sus manos accidentalmente, así, al inferencia no es deductivamente valida. Inferencias como estas, se deducen inductivamente validas. La premisa tres por contrario parece irracional para cualquier modo de razonamiento. De hecho, al ofrecer una premisa como esta, se asume preocupación en la lógica del individuo que la produce.

La validez inductiva es una noción muy compleja e importante. Razonamos inductivamente todo el tiempo; por ejemplo, al tratar de resolver problemas tales como por qué se ha roto el zapato, por qué una persona es egoísta, o por qué ha cometido un delito. Continuemos con la validez deductiva, que en apariencia es la más simple, puesto que la inferencia válida es más convencional. Por lo que no es una mala idea intentar comprender esta primero.

Hasta aquí es nuestro recorrido por los elementos de la matemática elemental: Aritmética, Computación, Álgebra, Geometría, Cálculo, Combinatoria, Probabilidad, Lógica. Hemos explorado el por qué es elemental para un ciudadano del siglo XXI, hemos destacado que no hay modo de delimitar lo que llamamos en estos hábitos “elemental”, y sobretodo, hemos descubierto que hay caminos comunicantes entre estas ramas de las matemáticas que resultan particularmente importantes recuperar en la formación elemental de la habilidad del pensamiento matemático.

Lección 4: Lógica

En el estudio de la lógica, el objetivo debe ser que logremos ser precisos y cuidadosos. El lenguaje de la lógica es exacto. Sin embargo, vamos a ir sobre la construcción de un vocabulario de este *lenguaje preciso* mediante el uso de nuestro lenguaje cotidiano que a veces resulta confuso. Necesitamos elaborar un conjunto de reglas que serán perfectamente claras y definidas dentro de un lenguaje natural como es el español. Podemos utilizar frases en español para explicar las reglas precisas de un juego de operadores lógicos. De este modo nos permite aprender a pensar con objetividad científica. Por supuesto, la lógica es más que un juego de operadores, puede ayudarnos a comprender una forma de pensamiento riguroso, que es muy útil y exacto al mismo tiempo. Las frases que empezaremos en principio son del tipo atómicas y moleculares.

En la era de la ciencia avanzada, la palabra atómica se emplea con mucha frecuencia. De hecho, el significado de la palabra en el lenguaje de la lógica es similar al significado original de las ciencias físicas. En lógica, atómico se refiere a la clase de oraciones más simples, básicas o elementales. Si ponemos una o más frases atómicas junto con una palabra de conexión, entonces tenemos una frase molecular. Una oración atómica es una oración completa sin conexiones de operadores. Utilizamos conexiones u operadores para hacer oraciones moleculares de oraciones atómicas.

Por ejemplo, consideremos dos oraciones atómicas:

```
Hoy es lunes.
```

```
Habrá clases.
```

Ambas frases son atómicas. Usando una palabra de conexión, podemos ponerlas juntas y tenemos una oración molecular. Por ejemplo, podemos decir:

```
Hoy es lunes y habrá clases.
```

Esta frase molecular está conformada por dos oraciones atómicas y la palabra de conexión u operador discursivo es "y". Cuando tomamos una frase molecular en sus partes, separamos sus oraciones atómicas. En el ejemplo anterior, podemos separar la frase molecular en las dos oraciones atómicas anteriores.
Las palabras de conexión u operadores discursivos, son palabras que son en esencia un operador lógico y no conceptual. De hecho, debemos aprender algunas normas estrictas para el uso de estas palabras clave. Gran parte de lo que podemos hacer en el acto de pensar pasa por el estudio de la lógica de encadenamiento de estas razones. El estudio cuidadoso de la lógica de este encadenamiento, depende de aprender a pensar con operadores discursivos. La palabra conexión en las oraciones, refiere a conectivos de carácter lógico que crean oraciones moleculares a partir de sentencias atómicas.

Los conectores de sentencias que usaremos en esta introducción son los conectores "y", "o", "sí", "no" y "sí … entonces…". Tengamos presente que emplear sentencias conectadas o encadenadas forman sentencias moleculares coherentes. La palabra conector u operador controla la razón formada por cadenas de sentencias atómicas. Una sola sentencia por si misma no forma una cadena de razón o sentencia molecular que deriva en una inferencia válida.

¿Qué es una inferencia válida? Primero, vivimos en un espacio de civilidad donde la verdad de la conclusión en la sociedad pasa por la verificación de la verdad de las premisas. Pero, ¿qué significa esto?, en general, hablamos de la capacidad humana de comparar reglas de código bajo criterios de verdad. Uno no debe de huir con la idea de la explicación de la validez deductiva anterior, que se expresó como si estuviera libre de problemas para aplicarla. Suponiendo que la conclusión es correcta, y sabemos que la inferencia es deductivamente valida por reconocer que no hay situación que invalide a las premisas. Ahora en cualquier razonable comprensión, debe haber más de una conclusión, en efecto hay muchas de ellas. ¿Cómo podremos saber todas las conclusiones que se podrían desprender de la cadena de razón?, parece un número infinito de inferencias sobre una situación; por lo tanto, es imposible, incluso en principio, construir todas las situaciones de inferencia. Así que nos damos cuenta que esta regla de validez es correcta, dado que podemos reconocer la inferencia de validez deductiva, pero no podemos conocer el universo de posibles inferencias.

Quizá pareciera que debemos invocar a algún místico para intuir la validez. No necesariamente, consideraremos un problema análogo para aproximarnos a este desafío. Todos podemos distinguir entre lo gramatical y lo no gramatical, en las secuencias de palabras de nuestro lenguaje escrito sin demasiado problema. Pero aparecen en los textos un número infinito de oraciones gramaticales y no gramaticales. ¿Entonces que debemos hacer?, Noam Chomsky sugiere que podemos reconocer en la infinidad de oraciones, que estas, están en ellas encapsuladas de reglas de sintaxis que evolucionaron a partir de axiomas innatos en nuestra biología, es decir, poseemos desde el nacimiento una gramática innata universal a nuestra especie. Podríamos decir, que hay una lógica de raíz en nuestra manera de producir la objetividad en el lenguaje. En resumen, la validez de la inferencia deductiva pasa por la validez de las premisas que sugieren la conclusión. No puede ser una conclusión verdadera, sin que su cadena de razón formada por premisas también lo sea.

Las reglas de validez para operadores lógicos nos sujetan fuerte a la objetividad, a la hora de evaluar las diferentes inferencias. Para las dos premisas sobre la linea, ocurre una conclusión por debajo.

El empresario es rico	El empresario no es rico
Los elefantes pueden volar	

Ciertamente no parece valida. La riqueza del empresario, no parece influir en las capacidades de vuelo de los elefantes. Ahora modificaremos la deducción

El empresario es rico
El empresario es rico o el elefante puede volar

La primera premisa parece verdad. Pero al tener en cuenta la conclusión. Un lógico llamaría al operador de conexión de la conclusión, cláusulas en unión disyuntiva. ¿Qué se necesita para que una disyunción sea verdadera? Solo que una u otra de las premisas sea verdadera, entonces la conclusión es verdadera.

$$\dfrac{\dfrac{\text{El empresario es rico}}{\text{El empresario es rico o el elefante puede volar}} \qquad \text{El empresario no es rico}}{\text{El elefante puede volar}}$$

Esto no puede ser correcto. El encadenamiento de inferencias válidas en este modo no puede dar una inferencia no válida. Si las premisas son verdaderas en cualquier situación, entonces la conclusión lo es, porque se deriva de estas y así sucesivamente, hasta llegar a la conclusión final. Para dar una respuesta más ortodoxa, debemos centrarnos un poco más en los detalles. Para empezar, vamos a escribir la frase "los elefantes pueden volar" como **p**, y la frase "El empresario es rico" como **q.** Esto hace las cosas un poco más compactas; pero no solo eso: si lo pensamos por un momento, se puede ver que las dos oraciones particulares realmente utilizadas en los ejemplos anteriores no tienen mucho que ver con las cosas particulares, puede haber dos oraciones particulares distintas en la misma condición, así que podemos ignorar su contenido. Esto es lo que hacemos a la hora de escribir oraciones solas.

La frase "El empresario es rico o los elefantes pueden volar" ahora se convierte en **q o p**. Un lógico a menudo escribe esto como **q V p.** La frase "el empresario no es rico" la podemos escribir como una negación de **q**. Es decir, $\neg q$, y se llama negación de **q**. Para la frase "el empresario es rico y los elefantes pueden volar", se puede escribir como **q** y **p**, siendo la "y" el operador de conjunción. Ahora podemos compactar la estructura anterior:

$$\dfrac{\dfrac{q}{q \vee p} \qquad \neg q}{p}$$

¿Qué observamos de estas inferencias?. Las oraciones pueden ser verdaderas y pueden ser falsas. Utilicemos **T** para decir verdad y **F** para falsedad. Cuál es la conexión entre el valor de verdad a y el de su negación $\neg a$. Una respuesta natural es que si una es verdadera, la otra es falsa y viceversa. Podemos expresar esto así:

$\neg a$ tiene el valor T si solo si a es su valor F.

$\neg a$ tiene el valor F si solo si a es su valor T.

Los lógicos llaman a estas condiciones de verdad, negación. Si asumimos que cada frase es verdadera o falsa, pero no ambas, podemos representar las condiciones en la siguiente tabla de la verdad:

a	$\neg a$
T	F
F	T

¿Cómo seria la tabla de la verdad para la disyunción?. Como ya se dijo, una posición natural a la disyunción $a \vee b$, es verdadera si una u otra es verdadera, y falsa si ambas lo son **F**. Esto lo podemos modelar con la siguiente tabla de la verdad.

a	b	$a \vee b$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$a \vee b$ son de valor **T** justo si solo si al menos una **a** y **b** tienen el valor **T**.
$a \vee b$ son de valor **F** justo si solo si las dos **a** y **b** tienen el valor **F**.

Ahora veamos el caso de "**y**". La suposición natural es que **b** y **a** ambas sean **T** y en caso contrario será **F**. Podemos representar esta condición en la siguiente tabla de la verdad:

a	b	$a \& b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

a y **b** es **T**, si ambas **a** y **b** tienen el valor **T**.

a y **b** es **F**, si alguna o ambas **a** y **b** tienen el valor **F**.

¿Ahora, cómo es que comenzó todo este problema?. Debemos volver a la pregunta ¿qué es una situación? Un pensamiento natural sobre una situación, determina un valor de verdad para cada sentencia (oración). Así, por ejemplo, en una situación determinada, un valor de verdad para cada oración es solo el principio de determinar dentro de cadenas de razón la objetividad de la misma. En otras palabras, la situación se determina por la relevancia de las oraciones en su valor de verdad y la concurrencia de ellas en las cadenas lógicas del discurso humano. Trabajar el valor de verdad, lo hacemos de la misma manera que empleamos variables en el álgebra arábiga, donde cada variable es un número sin especificar cuál. Por lo tanto las tablas de verdad no refieren a los contenidos de las sentencias.

Recordemos ahora, que una inferencia es válida, siempre que no haya ninguna situación de invalidez de las premisas dentro de la cadena de razón, esa misma que sostiene la inferencia de conclusión.

¿Por qué la importancia de estudiar lógica como carga académica básica? Los argumentos están en todas partes, en el discurso de los profesores, políticos, escritores, científicos, técnicos, … El problema es que muchos de ellos con intensión o son muy malos y afectan la productividad, la democracia, la cultura en general. En un mal argumento, las premisas son irrelevantes para las conclusiones las que supuestamente son fundamentos de muchos malos intencionados. No es solo violar las reglas básicas de la lógica. La experiencia nos demuestra que sembrar falsas creencias en la gente, es desastroso y crea fracturas en la democracia, haciéndola perniciosa para su sociedad.

Cuando un argumento es incorrecto, es porque su autor tiene comprometida una falacia. La falacia o argumento incorrecto cuando es formal, es falsa por la simple incoherencia de la forma del encadenamiento de las premisas. Podemos a este tipo de falacia referirla como estructura lógica defectuosa. Es cuando el argumento intenta inferir una conclusión y sin embargo, debido a la mala estructura de razón que encadena a las premisas es incoherente su lógica.

La falacia informal es muy difícil de identificar, debido a que la cadena de razón es correcta, pero el contenido de las premisas no es coherente con el de la conclusión, por estar fuera de contexto, o simplemente por no tener una misma base axiomática de sus fundamentos.

Lección 5: Poincaré es la visión alterna al formalismo de Hilbert

Intentamos comunicar el concepto de matemáticas sin usar notación simbólica de proposiciones, para que el lector pueda reconocer en este ejercicio intelectual la belleza de esta parcela del conocimiento humano, donde la organización de las piezas conceptuales que la componen es necesaria para formar técnicos y científicos para el desarrollo de una sociedad.

Las matemáticas nos permiten los avances en la tecnología, los números fueron los primeros objetos matemáticos para comunicarnos entre culturas, ahora la teoría de números no solo explica órbitas de planetas, armónicos de música, secuencias de genes, también el cómo se organizan los pétalos de una margarita. Nuestra imagen del mundo no deja de ampliarse por las matemáticas, de hecho "los matemáticos del siglo XXI pueden construir teorías y realizar cálculos de todo tipo, pero es posible que no dispongan de la capacidad para asimilar, explicar o comunicar estas ideas[34]". De acuerdo con Clifford A. Pickover, el problema civilizatorio pasa por las formas de acercar al público en general los avances en matemáticas, la pedagogía está en crisis ante la complejidad y diversidad de los adelantos en matemáticas.

David Hilbert en 1900[35], propone 23 problemas matemáticos que harán historia[36].

Henri Poincaré, propone una visión inductiva de las matemáticas.

De acuerdo con Descartes la esencia de la ciencia y la técnica se haya en las matemáticas, estas ofrecen los principios del espacio que afirman que la naturaleza tiene una matemática de lo real, es el diseño del mundo; argumentación pura; proposiciones que hablan de ficciones perfectas ante la lógica formal; lenguaje artificial que permite alcanzar lo sintético dentro de la química, la biología y la inteligencia artificial; nos dice la matemática que en la realidad además de ser posible realizar medidas, explorar sus comportamientos, es posible crearla como una realidad extendida por medios artificiales: el software y lo material sintético.

Los objetos matemáticos son entidades abstractas que son comunicables, y están confinados a la mente humana, su creadora y su portadora. Son ideas perfectas dentro de las propias matemáticas, su demostración les da objetividad y de la misma manera, solo dentro de las mismas matemáticas encontramos sus explicaciones. Son creadas como resultado de ficciones que recogen métodos y axiomas como razones que describen un conjunto de verdades matemáticas.

Las matemáticas sin duda alguna son responsables de los saltos que damos en la manera de vivir la realidad, ya sea atómica, biológica, química, artística o del cosmos. Nos apoyamos en ellas para explicar la evolución química de los aminoácidos, la mecánica de los códigos, la criptografía de firmas digitales, la respuesta del sistema inmunológico…; exhibimos su potencial en la programación de computadoras, en la navegación de aeronaves y las comunicaciones electrónicas como la Internet. La exploración científica y técnica de los seres humanos tiene como frontera el propio límite de nuestros desarrollos matemáticos, por ello, educar en este campo es una tarea de civilización.

La fascinación por los números ha desarrollado todo un campo de teorías de números; la seducción de códigos ha impulsado la teoría matemática de la información; los sistemas dinámicos y sus aplicaciones encuentran en las ecuaciones diferenciales y sus sistemas, un campo que la matemática reinventa a la tecnología. Las comunicaciones y los asistentes informáticos automatizan la industria, algoritmia que se presenta como robots, instrumentación virtual, y patentes con un alto grado de especialización. Más allá de la descripción matemática de la realidad, nuestra civilización ha llevado esta innovación a la antesala de crear una nueva realidad apoyada en la imaginación y la tecnología de base matemática.

Las matemáticas han tenido crisis en respuesta a la naturaleza de sus entes (conceptos y objetos). Algunos matemáticos afirmaron que los conceptos y objetos matemáticos son reducibles a argumentos lógicos (**tesis logicista o formalista**), por otro lado, hay quienes afirman que los objetos matemáticos provienen de la intuición pura, entre ellos Kant (**intuicionistas** como Poincaré[37]). Otros las observan como propiedades de las cosas (empiristas)[38]. En un sentido distinto, otros más dicen que los objetos matemáticos tienen existencia trascendental (**tendencia realista**). La tendencia formalista de Hilbert entra con fuerza en el siglo XX, al considerar que los conceptos y objetos matemáticos son reducibles a relaciones lógicas, afirma que hay en los fundamentos de la matemática conceptos no contenidos en la lógica, lo cual, los traduce en otros nuevos al fundamentarlos al lado de los postulados lógicos, y esencialmente uno que se refiere al infinito[39]. El sistema formal que amplía la lógica, permite fundamentar la estructura deductiva, para la cual Hilbert se propone dar los razonamientos completos para la objetividad matemática, lo que lo conduce a ver que toda proposición que no sea una convención, para que sea parte del sistema formal, debe ser, o un axioma o una proposición a la que se llega por una cadena de operaciones del sistema formal a partir de los axiomas; luego, toda proposición del sistema formal es implicada por el sistema de axiomas. Comprende una metodología logística, axiomatizada y en conjunto con la teoría de la demostración (Beweistheorie) es un método. El método consiste en: 1) en axiomatizar la teoría en cuestión; 2) traducir la teoría en notación matemática simbólica; 3) demostrar la coherencia del sistema de axiomas: compatibilidad, independencia, integridad y determinación[40].

La propiedad de compatibilidad se refiere a que un sistema formal es compatible si ha probado a partir de sus axiomas no tener dos proposiciones contradictorias. Esto es relevante para la empresa científica y técnica, porque en ambos ámbitos, sus cálculos no deben tener en su interior contradicciones. En la matemática moderna podemos ver la obra de Hilbert, por ser un método de demostración preciso, claro y conciso; el encadenamiento lógico perfecto ejecutado con fundamentación axiomática, parece haberse impuesto en la manera de aproximarnos a la imaginación y a la intuición matemática, como forma de comprensión de su naturaleza; el formalismo de Hilbert da estructura al rigor matemático del análisis y la formulación de teorías en la ciencia. Hilbert postula que pueden coexistir diferentes lógicas sin contradecirse[41].

Poincaré es la visión alterna al formalismo de Hilbert, nos dice que la inducción matemática, es decir, la demostración por recurrencia, se impone necesariamente, porque no es más que la afirmación de una propiedad del espíritu humano. Como consecuencia de lo dicho, resulta que la matemática no es perfecta en el sentido formal, pero sí lo es en el sentido humano, es decir, en relación a la capacidad del intelecto humano.

En conclusión:

La estructura de las matemáticas es formalista[42].

La justificación de sus axiomas es inaccesible por la vía formal, es un contenido intuitivo en el sentido de Kant y Poincaré[43].

Enseguida, analicemos la axiomática del álgebra aritmética, para darnos una idea de estas posturas. Las reglas de un álgebra, o leyes conmutativas y asociativas para suma y multiplicación son:

S1) La ley conmutativa para la adición: a + b= b + a, para cualquiera dos números a y b.

S2) La Ley asociativa de la adición: a + (b + a)= (b + a) +c, para tres números cualequiera a,b,c.

S3) 0 es un la identidad para la adición: 0 + a =a, para un número cualquiera a.

M1) Ley conmutativa de la multiplicación: ab=ba, para cualquiera dos números a y b.

M2) La Ley asociativa de la multiplicación: a(bc)=(ab)c, para tres números cualquiera a,b,c.

M3) 1 es en la multiplicación la identidad: 1a=a para un número a.

D1) La ley distributiva: (a+b)c=ac+bc, para cualesquier tres números a,b,c.

Estas reglas son interesantes porque por sí mismas persuaden a la mente sobre el papel que desempeñan en nuestro pensamiento, incluso en las declaraciones más simples. Nuestra confianza que 3 x 4 =12 se basa en un cuadro bidimensional en el que este producto puede verificarse como la suma de 12 unidades cuadradas 1x1=1. Pero que significado tiene 0x0=0.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

El número cero aparece como idea justo después de que el hombre consolida los números enteros positivos, antes que aprendiera a escribir y leer. El cero llegó como algo paradójico relacionado con la nada y misterioso cuando la sociedad se preguntó ¿cómo puede existir un número para la nada? Desde el punto de vista abstracto, el cero es muy sencillo, solo es un apoyo para los sistemas de numeración con las siguientes propiedades.

S3 no es todo lo que debemos saber de cero, visto como la identidad bajo la suma. Cómo demostrar que 0x3=0, donde 3 se define como 1+1+1. En primer lugar, la ley M1 no dice que 0x3=3x0. A continuación, la ley D nos dice que (1+1+1)x0=1x0+1x0+1x0. Pero 1x0=0 mediante la ley M3, así que esto es igual a 0 + 0. Y por la regla S3 implica que 0+0=0, y la argumentación termina.

Un argumento no abstracto sería decir que 0x3 significa no sumar 3 y así nos quedamos con cero. Pero esta forma hace que el pensamiento no sea riguroso para contestar por ejemplo ¿por qué cero veces cero es cero, puesto que cero veces no representa la nada?

0=1x0 por la regla M3

$0=(0+1)x0$ por la regla S3

$0=0x0+1x0$ por la regla D

$0=0x0+0$ por la regla S1

$0=0x0$ por la regla S3

Estamos dando este camino de demostración, porque nos parece que las demostraciones matemáticas son interesantes para desarrollar el pensamiento, y además por el deseo de mostrar lo que significa justificar las declaraciones aritméticas abstractas, empleando reglas simples sin preocuparnos de lo que realmente es el número cero. Por supuesto que es necesario asociar el significado de un número con imágenes mentales de los objetos matemáticos, a menudo estas asociaciones porcentuales no son suficientes para decirnos qué hacer en contextos nuevos y desconocidos. Entonces el método abstracto se convierte en indispensable.

El concepto de cero no solo es misterioso por evocar a la nada, un vacío primordial, además, resulta de un peligro real, dado que con el cero existe la posibilidad de romper el marco de la lógica. Hemos dicho que el cero nace después de los números enteros positivos, dado que la hipótesis que sostenemos, afirma que los hombres necesitaron primero registrar todo lo existente, como animales y otras cosas; y así durante algún tiempo al hombre no se le presentó más necesidad de contar y registrar. Cero resutó tan extraño que algunas culturas nunca lo demandaron, les resulto absurdo contar la nada. Los primeros registros que se conocen de los números fueron sobre tablas de arcilla y huesos de lobo. Pero en ellos hay evidencia que el hombre solo pensó la unidad y una serie creciente positiva de muchos números más. La base numérica de base 10, se cree es un accidente a través de las culturas que tomaron la cantidad de los dedos de las manos como el número de símbolos base para contar. Los griegos emplearon la palabra "oscuro" para referir el proceso de recuento. Otras culturas emplearon el sistema de base 5, o quinario; los Mayas emplearon la base 20 por corresponder a la cuenta de dedos de pies y manos, parece que las culturas antiguas gustaron de emplear al cuerpo humano como referencia para contar.

Hemos argumentado que contar cero caballos o cero niños pudiera parecer que no es necesario, un número para contar algo que representa la ausencia de ese objeto. Quizá por ello muchas culturas siguieron con sistemas sin incluir el cero. Las personas que podían llevar la cuenta del tiempo, del espacio, de cosechas, eran considerados dioses, sacerdotes y su rango social era una jerarquía muy cercana a jerarcas, emprendedores y líderes. Pero para evitar hacer del conteo un recital apoyado en el número de dedos, se hace necesario un sistema numérico simbólico para registros complejos. Se sabe que las cifras de conteo se crean mucho antes que la escritura y la lectura tempranas en la civilización. Las piedras, huesos y arcillas labradas anteceden a las tintas. Transcribir el sistema oral ha escrito, fue un sistema de descodificación por el que escribas podían fijar los números en primer lugar, antes que las narrativas de la condición humana.

Lo primero fue resolver un sistema base que hiciera pensar a los números como contenedores de la noción de cantidad, en lugar de marcas, se emplean símbolos para cada agrupación base, donde cada uno de ellos pudiera ser reciclado para expresar series más complejas. Fueron los Egipcios los que desarrollaron un sistema decimal hace más de 5000 años, donde cuadros estaban separados para recibir números, con una sola marca vertical se representaba la unidad. Para escribir 135 con este sistema, en lugar de emplear 135 marcas para esa misma cantidad de unidades, los egipcios escribían seis símbolos: una trampa, tres talones y cinco marcas verticales. Fue la manera típica de hacer matemáticas en la antigüedad, y como muchas otras civilizaciones no emplearon el cero para contar, aunque en su geometría lo emplearon para referir al origen de todo sistema geométrico.

Los griegos también conocieron la unidad, a partir de ella mediante un sistema decimal desarrollaron una serie de números positivos crecientes, pero en este caso cuando la unidad era dividida 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/n = átomo. El átomo fue resultado de dividir una unidad de roca, donde el límite era un átomo o parte indivisible de la materia. Aquí es de destacar que la nada y la realidad material tenían como frontera los átomos. Donde **n** representaba al número de lados de un círculo, es decir, un círculo es un polígono regular, mismos ángulos interiores y longitudes de lado para un polígono que se le aumenta indefinidamente en número hasta llegar al átomo. Y al igual que los Egipcios no necesitaron del número cero.

La necesidad de contar con un calendario, una vez que la conciencia humana alcanzó certeza sobre ciclos de repetición en cambios lunares y climáticos relacionados con la inclinación de los ángulos de la luz solar, es que el hombre perfecciona los sistemas numéricos para cuentas más precisas y complejas. El mes lunar se calculó entre 29 y 39 días, que son 12 meses lunares de 354 días, 11 días por debajo del calendario solar pensado por los Mayas. Corregir el año lunar es una tarea compleja, pero necesaria para empatar con precisión las estaciones del año. También los Egipcios emplearon el año solar para ello; sobre un sistema numérico de base 10, para la semana llamada década fue de 10 días, que suman en un año 365 días. Este calendario fue adoptado por los griegos y luego por el imperio romano, este último modificó la adición de años bisiestos y entonces se convirtió en el calendario occidental sin ceros en su estructura, un problema que podría causar sesgos de milenios más tarde. La innovación Egipcia del calendario no fue la mayor aportación a la civilización occidental, sino el arte de la invención de la geometría. Incluso sin un cero, los egipcios habían representado el origen geométrico como un lugar sin dimensiones. La geometría nace por la necesidad de tomar muy en serio el respeto a la propiedad de áreas de cultivo. Las parcelas se dividieron en rectángulos y triángulos buscando ser lo más preciso posible. La geometría plana egipcia evoluciona al espacio tridimensional para calcular volúmenes de materia en la arquitectura. Así que el punto de origen geométrico sin expresarlo así, fue el cero egipcio para referir un lugar de referencia sin dimensiones y a partir de este medir el espacio circundante.

Los griegos a diferencia de los Egipcios, incluyen en las matemáticas el pensamiento filosófico. Es extraño que los griegos no descubrieran al cero, pero mejoraron el sistema decimal incorporando letras en lugar de iconos y el sistema de base 10 se hace más sofisticado. Pero no aparece cero en su cultura, es en el actual Irak que los babilonios introducen el cero en el sistema numérico sexagecimal, es decir, de base 60 para sus símbolos básicos. En lugar de emplear nuevos símbolos para diferentes números, era posible hacerlo solo con los básicos. Esto les permite a los babilonios crear las primeras máquinas en ayuda a las cuentas, aunque fueron los chinos y su ábaco la primer máquina de contar conocida. Los babilonios crean las palabras calcular y cálculo precursoras de la informática moderna. El sistema babilonio es posicional, muy parecido al ábaco en este sentido. Cada agrupación tiene un valor diferente dependiendo de su posición. De esta manera, el sistema babilonio no era tan diferente al que hoy usamos. Posiciones de unidad, de derecha a izquierda para referir 1, 10,100,1000,10000 respectivamente. Del mismo modo, el símbolo para escribir la unidad fue un símbolo único, y hasta representar 60, ese mismo símbolo se desplaza a la posición inmediata izquierda agregando cero. Cero toma significado de los otros dígitos a la izquierda, aquí cero es un dígito, no es un número. No tiene ningún valor. Quizá importado de la India, donde el cero representa el conjunto vacío.

El valor de un número viene de su lugar en la línea de posición derecha izquierda. Sin embargo, los babilonios consideran al cero el primer número en la recta numérica, solo como un símbolo sin ningún referente a su concepto de número. En resumen, los babilonios crean el dígito cero como marcador del sistema numérico sin lograr conectarlo con alguna noción de número. Esta herencia hasta hoy es clara en el sistema numérico decimal moderno de base 10, es decir, de 10 símbolos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Además, los babilonios emplearon un símbolo para separar los negativos de los positivos, este fue el cero. Desde entonces, hasta hoy, el registro de la cuenta de memoria de las computadoras modernas empieza en el registro del byte 00000000, de allí empieza la cuenta.

Los Mayas concibieron que la cuenta empieza en cero, a partir de la idea en que el universo se crea de la nada. Los Mayas crearon uno de los mejores calendarios solares y sistemas numéricos gracias a que en su estructura está contenido cero como número. El propio sistema Maya es posicional, pero además introducen la idea de cifras de base 20, pero con dos tipos de dígitos. El tipo de dígito simple se basa en puntos y lineas, mientras el tipo de cuenta larga emplea un símbolo parecido a un ojo, este cero no es aquí un símbolo, sino un número.

Al cero Maya se llega por divisiones sucesivas 1/1, 1/20, 1/200, 1/200, 1/2000, 1/20000, hasta

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Este cero Maya, representa un número que asocia indeterminación de cantidad y es la frontera infinitesimal con la NADA. A diferencia de otros sistemas como el Egipcio, los mayas hicieron lo obvio, comenzaron a contar desde cero. El calendario Maya se formó de meses de 20 días, numerados de 0 a 20, y no de 1 a 20 como lo hacemos hoy. Combinado con el solar, crearon un calendario con un nombre distinto para cada día, en un ciclo de 52 años.

Los egipcios manejaron las fracciones de manera muy engorrosa, donde cada fracción se puede representar como sumas de **1/n** donde **n** es un número de cuenta. Largas cadenas de fracciones egipcias de la unidad hizo extremadamente difícil codificar la información registrada. El cero Maya hace obsoleto este sistema. Pero los babilonios son los que crean la representación con punto decimal de cifras para fracciones, tal como lo hacemos en el presente en un sistema de base 10. Es claro que el avance tecnológico se hubiera acelerado en Europa, sí los romanos y los griegos no hubieran rechazado a cero. La razón quizá fue que lo consideraran peligroso para los fines religiosos, dado que cero es la ausencia de Dios, del tiempo y del espacio. Es difícil imaginar esto, pero la nada o vacío representó a la muerte. Los griegos creyeron en una frontera hecha por los dioses **1/n**, con la idea de átomo, como una forma de asegurar no entrar a la nada, la oscuridad del lenguaje, de la música y de la existencia humana. Los Indios relacionaron al vacío como desorden absoluto, un estado primitivo y natural del cosmos, donde todo empezó. Los Mayas imaginaron esto muy distinto, el cero es una manera de vivir en un plano existencial circular en su historia. La muerte es una forma de saltar a otro círculo existencial. La eternidad del tiempo, el no poder determinar donde termina la existencia y empieza la nada, se le asigno el número cero. Cero representa no el vacío del pensamiento Indio, sino la frontera de indeterminación de lo existente y la nada. Para los Mayas resulta sin ningún temor que el tiempo comenzó en cero, hoy tan importante para la Teoría del Big Bang.

Además, la problemática de dividir una cuenta entre cero para los babilonios, griegos, romanos resultó algo peligroso. Si bien **1 + 1** no es uno, cero + cero es cero, este hecho Maya, violó un principio básico de los números en los axiomas de Arquímedes, que dice que cuando se añade un número a otro número, el segundo cambia su magnitud que representa cantidad. Solo baste con ver 4 + 0 es 4, es un elemento neutro para la suma o la resta, cero no tiene ninguna cantidad asociada, pero

$$\frac{1}{\infty}=0,$$

amenaza con socavar lo conocido hasta ese momento del conocimiento aritmético. La división y la multiplicación 0/0=0, 0x0=0. Nada a veces cero es cero, el cero Maya irrumpe al advertir que la recta numérica pudiera tener otros infinitos ocultos en la apariencia de continuidad de su numeración, tales puntos serian por ejemplo los irracionales $\sqrt{2}, \pi$.

No es descabellado pensar que los Mayas llegaran al cálculo infinitesimal antes que Newton y Leibniz, por lo menos no tuvieron temor alguno para explorar el contexto de cero e infinito de la matemática moderna, probablemente allí este la respuesta de la enorme y asombrosa precisión de sus cálculos. Multiplicar por un número diferente de cero, por cero, destruye al número, reinicia la cuenta, de la misma manera que el *reinicio* de las computadoras. Solo nos queda especular dado que los españoles destruyeron mucha información, que los Mayas reiniciaron las cuentas al multiplicar por cero; iniciaron la cuenta desde cero, y el propio tiempo y espacio fueron creado desde cero, y la división de un número diferente de cero entre cero no está definida dado que la nada amenaza con destruir los cimientos de la lógica y matemática. Multiplicar por cero solo destruye al número, pero dividir entre cero destruye todo marco de las matemáticas. Cómo tanto poder en un solo número es capaz de impulsar a la ciencia y la ingeniería a limites insospechados de creatividad humana. La entropía o desorden absoluto, o si la prefiere ver como información potencial de un algo es cero orden, es decir, igual a caos absoluto.

Este viaje, es un recordatorio a todos nosotros que el pensamiento matemático es el más grande de los logros de la globalización cultural de la humanidad, y deberá bastar para convencer a los jóvenes, que debieran aprender el pensamiento matemático como un camino acumulativo de conocimiento cultural, en un sentido de menor complejidad a mayores límites insospechados de matemáticas abstractas. México es heredero de este enorme número cero que creo la revolución de la matemática moderna, honrar con orgullo este hecho debería bastar también, para hacer grandes esfuerzos pedagógicos y que nuestros jóvenes sean mejores que sus profesores, este deseo como el objetivo pedagógico más importante para guiar todo esfuerzo educativo.

Los objetos matemáticos se desarrollan más que se despliegan, y se desarrollan a partir de verdades evidentes (axiomas), para que se conciban nuevos a partir de ese punto, es necesario que el novel los deconstruya hasta sus cimientos (axiomas o teoremas). Al espiarse a sí mismo el novel, puede reconocer su propio camino matemático. Cuanto más explora en lo profundo de los objetos matemáticos, más consciente es el novel, es cuando su actitud para las matemáticas mejora desde un punto en apariencia insoluble, a un estado de nuevos límites interiores dentro del pensamiento matemático. Cada aprendizaje producto no de una habilidad de técnica matemática, sino de un análisis exhaustivo de los principales argumentos que lo definen y resuelven, al agotar los muchos de los aspectos extraños a la curiosidad, además, se gana eficacia en gran parte por precisar el papel de un objeto matemático dentro de otros más complejos.

Lección 6: Objetos matemáticos y sus razones

Solemos utilizar la idea de pensamiento como una reflexión, asignando el pensar a una multiplicidad de procedimientos analíticos, culturales y subconscientes. Se dice, que todos poseemos esta facultad, sin embargo, es algo que no es democrático, sino educativo, se trata del pensamiento serio, riguroso, creativo, audaz y hermoso de las matemáticas,…, es aquel vinculado con los poemas de Octavio Paz, los sonetos de Shakespeare, los ensayos de Montaige, teorías como las de Werner Karl Heisenberg; las ideas originales son raras y difíciles, en un texto es algo inherente a un proceso de creación.

Todo pensamiento comienza por una necesidad, la voluntad de ser y de conocer. Comienza en donde se funden literatura, ciencia, matemáticas y técnica; podemos oír susurros de la creatividad, pensamiento abstracto que ilumina la vía para los argumentos analíticos, la metáfora y aprendemos a escuchar y ver más profundamente. Hablamos de las matemáticas, análisis particular dentro de un sistema axiomático, técnico e instrumental. Pero allí donde no se hace matemáticas en el sentido estricto, ocurre la educación de las mismas; una narración mezclada con proposiciones que explican y seducen a la imaginación; hablar de matemáticas en la educación es tolerancia, universalidad, ilusión de los ciudadanos creativos, aunque algunos lógicos pudieran decirnos que estamos en un error categorial, la educación trata a la matemática como si fuese un lenguaje natural, como si se hallase muy cercana a este. Es trasladar una realidad semántica idealizada a un código lingüístico cultural. Los conceptos matemáticos se experimentan como la construcción de un discurso de fusión del lenguaje natural y artificial. Las experiencias de los noveles a estas narrativas de fusión, tienen efectos de elocuencia y economía del tiempo, inclinando la legitimación lingüística de un novel al mundo platónico ideal.

Una frase en la narrativa de fusión (natural-artificial), no es un segmento histórico, sino un paso en los caminos abstractos de las ficciones matemáticas, es la contaminación intencionada, es una voz insertada dentro de las proposiciones matemáticas, hablamos del profesor. Esta coexistencia híbrida en un texto educativo en la enseñanza de las matemáticas, es capaz de aceptar una verdadera interacción entre los textos de lenguajes naturales y artificiales.

A diferencia de los lenguajes naturales, las matemáticas son un lenguaje universal. Existen datos sensoriales y emocionales de las matemáticas que son mucho más inmediatos que los del habla, tales como, el concepto de cantidad, probabilidad y espacio. La recepción es más o menos instantánea en las etapas intuitivas, cuyas interconexiones sinápticas y rendimiento acumulativo apenas comprendemos. Aquí nos situamos en una dualidad de sentido y significado que los investigadores de las ciencias cognitivas han sido incapaces de dilucidar.

Los avances en el conocimiento científico en los últimos 50 años, nos confirman la fuerte relación entre álgebra y geometría; al parecer comienza con un hito de la historia, en el pensamiento pitagórico de la demostración matemática, cuerpo de proposiciones que argumentan con ayuda de lógica formal la inferencia de validez, esa misma que permite construir una verdad matemática. Afirmación que tiene origen en los axiomas, que se les conoce como teoremas y que construyen lo que se llama objetividad matemática.

La **objetividad matemática**, está confinada al propio mundo de los objetos ideales platónicos, o simplemente objetos matemáticos consolidados por demostración. Cuando esta objetividad no es sólida, a las proposiciones de este tipo se les llama postulados. Las proposiciones matemáticas refieren a objetos idealizados, ficciones matemáticas que en algunos casos se asemejan a lo que podemos encontrar en el mundo físico. Cuando un ingeniero a partir de conocimientos técnicos propone un modelo tecnológico para la realidad, primero lo pone a prueba en el mundo platónico, enseguida, evalúa los resultados frente a pruebas experimentales, diseñadas para poner a consideración las proposiciones que sustentan las hipótesis. A un ingeniero, para reducir los márgenes de tiempo, costos y falta de eficacia para generar conocimiento, le es necesario un modelo matemático.

Respecto a una existencia matemática, podríamos decir que está confinada a las propias proposiciones que estructuran objetividad en el mundo platónico. Las matemáticas son la creación de la mente humana en su forma más confiable, un lenguaje artificial universal capaz de explorar un mundo mucho más allá de los límites convencionales de la intuición, es llevar la razón a la frontera de lo indecible. La objetividad matemática es una especie de formulación proposicional de existencia en la frontera de la imaginación lógica, la verdad matemática es la conquista de un palmo más de terreno en esta idea de progreso matemático. La existencia matemática es casi una metáfora, en el sentido que expresa mundos éticos y moralmente posibles. La **existencia matemática** es un subyacente sobre la tesis de lo evidente. Sin embargo, el sistema axiomático sí determina la posibilidad de las proposiciones a generar, esta cerradura bien podríamos llamarla objetividad matemática.

La **existencia matemática** no tiene referentes materiales, temporales, geográficos, o morales, pero sí alcanza en su estructura racional el grado de existencia por el hecho de poder ser potencialmente racionalizable por otras mentes humanas, que con honradez y esfuerzo se toman la molestia de invertir su vida en este fascinante mundo de lo posible.

Aún hay claros oscuros en el cómo percibimos la **verdad matemática**, algunos biólogos han encontrado que otras especies también pueden contar, esto nos sugiere que los humanos poseemos una programación genética para calcular. Quizás por ello, los primeros humanos relacionaron la matemática con la interacción cotidiana, con la naturaleza del mundo físico. Es hoy aceptado por la comunidad científica el hecho de que nuestro universo físico puede ser matematizado, sin embargo, las matemáticas en su interés concreto de verdad, es distinto al de la ciencia, respecto a esta última, la verdad es un consenso público provisional en el tiempo.

La música y las matemáticas.

Las matemáticas son otro lenguaje universal como lo es la música. En ambos la traducción es algo inexistente, quien escribe para educar en matemáticas, aplica notas secundarias al cuerpo de proposiciones matemáticas, son explicaciones u orientaciones para el lector, pero, eliminando estas notas, las matemáticas como la música solo pueden parafrasearse en ellas mismas, inician con enunciados, como calcúlese, hágase, evalúese, demuéstrese, sustitúyase, desarróllese,…; es en las matemáticas y la música que el sentido de verdad es equiparable al de belleza. Los enunciados matemáticos, es decir, las proposiciones solo admiten dos estados de verificación o son verdaderas o falsas, los errores son eso, no son mentiras.

Las matemáticas y la tecnología

En la vida moderna, las matemáticas han modificado la realidad a través de la tecnología, la economía, la democracia y el arte. La ciencia computacional y su teoría de la información son un claro triunfo de las matemáticas aplicadas en su papel de cálculo y virtualización. La invasión de avanzados algoritmos que subyacen como aplicaciones cotidianas en los hogares y el trabajo, presionan a tal grado que modifican rápidamente las formas de vivir, crear y comunicar. Las matemáticas son la base de los sintéticos en la química, la biología y de la Web; destaca notablemente el hecho de que las matemáticas en sus ramas como la teoría de la información, gramática generativa, teoría de números, sistemas complejos y dinámicos, plantean una cuestión: las matemáticas nos permiten crear un mundo no dado, soñarnos en tipologías espaciales inimaginables, con literaturas hipertextuales de narrativas de imaginación aumentada; ¿es este el nuevo salto civilizatorio o decir fantástico?. En un sentido histórico las matemáticas han aumentado nuestra capacidad de explorar, controlar y reinventar la realidad, al mismo tiempo, la brecha entre quienes las comprenden, explican y aplican y en la sociedad se está haciendo peligrosamente una elite.

Lección 7: Nuestra herencia en el sol

La matemática por su precisión e inequívoca dinámica puede satisfacer criterios de refutación, de creación de nuevos objetos matemáticos con autonomía y en apariencia sin límites. Sin embargo, en el discurso de la enseñanza, el lenguaje natural agrega su naturaleza imprecisa con el fin de formar una narrativa que construya una experiencia de conocimiento y articule el tiempo en forma de vivir un aprendizaje. El aturdidor silencio de la matemática, ocasiona en muchos noveles una muerte de la vía semántica, es decir, una frustración en la interpretación de proposiciones matemáticas, en consecuencia, se nos niega el acceso al propio mundo platónico. El lenguaje natural dota de la sensibilidad necesaria para la memoria de largo plazo, incluyendo la simbología de la notación matemática, tal como lo hace, para la razón dentro de un poema el propio ritmo, como un factor de relación en nuestra memoria.

La cuenta de los soles llevó a los Mayas a la construcción del cero moderno, de cálculos asombrosos y fuertemente documentados en las esferas de la comunidad astronómica internacional, historia única que nos hace reflexionar sobre los hechos arquitectónicos emparejados con la cúpula celeste; debió haber factores culturales que motivaron a esta civilización a calcular con ayuda de las matemáticas el tiempo, el espacio y la información. Sin embargo, parece que fue también un asunto de elites, privilegiados que en la vida intelectual de sus comunidades plantearon una cosmovisión orientada al saber vivir, en función de conceptualizar la muerte. Siendo la realidad algo extraño, que nos sorprende en el viaje a su interior, la única navegación segura o más segura que hemos encontrado en el ámbito del conocimiento objetivo, es la matemática. El camino de la matemática es la búsqueda de la verdad que superpone la supervivencia individual y colectiva de una civilización. Su ausencia en una sociedad, es un factor de decadencia de permeable corrupción al desdeñar en la educación de sus ciudadanos, los valores del desafío intelectual inherente al lenguaje matemático, es decir, la indagación intelectual encaminada al discernimiento responsable de la realidad por la vía matemática, es un factor de tolerancia democrático necesario para construir acuerdos en comunidad.

Un ciudadano con más recursos para argumentar, es un ciudadano que más se aleja de la violencia y más se aproxima a su libertad creativa. Una ruta de aprendizaje de las matemáticas, es como un poema que abre un nuevo comienzo, que sus enunciados habitan en el mundo platónico; demarcación que identifica la cultura occidental. Nuestra propuesta es aspirar a renovar el encanto e iluminar el camino sistémico, simbólico y de aplicación tecnológica para nuevos ciudadanos que en la matemática puedan encontrar el nuevo diálogo para su propio progreso.

La herencia matemática

Las matemáticas nacieron con la razón, el habla y la consciencia, hace unos 10,000 años, quedaron impresas sus marcas en tablas de arcillas[44] en el Oriente Próximo. De la acción de marcar se pasó a símbolos sistematizados por los antiguos babilonios[45], movimientos de sucesos celestes periódicos fueron registrados y calculados; la agricultura avanzó con los calendarios; las matemáticas se convirtieron el ritmo cultural de una época, son la antesala de nuevas tecnologías; de la astronomía a la agricultura, del comercio con aritmética, en el comercio con Internet: teoría de la información, proceso de señales electromagnéticas, topología de redes,…, esta historia de un universo numérico se está volviendo más abstracta, ahora explorando los espacios multi - dimensionales y la dinámica del caos.

Un texto clave de la historia de las matemáticas son los 5 libros que sobreviven de Euclides *los Elementos, la división de figuras, los datos, los fenómenos y la óptica*[46]. El libro quinto, los elementos, nos introduce a conceptos geométricos básicos, compuestos por 465 proposiciones divididas en 13 capítulos:

1) triángulos

2) rectángulos

3) círculos

4) polígonos

5) proporción

6) similitud

7-10) Teoría de los números

11) geometría sólida

12) pirámides

13) sólidos platónicos

Elementos se compone de 23 definiciones, cinco postulados y cinco "nociones comunes", y sistemáticamente la geometría plana y sólida. Los cinco postulados de Euclides son:

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto a otro punto.
2. Es posible producir una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3. Es posible describir un círculo con cualquier centro y radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corta a dos rectas hace los ángulos interiores del mismo lado menores que dos rectos, las líneas rectas (si se extiende indefinidamente) se reúnen en el lado que están los (ángulos) menores que dos rectos.

El quinto postulado es conocido ahora como el de paralelas, destacamos que Euclides dejó inconcluso su trabajo, por ejemplo Hilbert necesitó de 20 postulados para completar la lógica de la geometría. Las geometrías no euclidianas: hiperbólicas, elípticas, esféricas son coherentes para los primeros cuatro postulados, en 1868 Beltrami lo demostró[47]. Los pitagóricos practicaron una filosofía de un universo basada en los números, se pasó de los números naturales (1,2,3,4…) a un segundo tipo llamado fracciones o números racionales (un número racional es una fracción a/b donde **a** y **b** son números naturales donde **b** es diferente de cero), cuando las fracciones no son exactas, es decir, es un número que no puede ser expresado como una fracción de enteros, son decimales en expansión infinita. El más famoso es llamado constante de Pitágoras ($\sqrt{2}$), que según una leyenda le costó la vida a Hiparco al expresar su descubrimiento[48]. A los números enteros y racionales se les llama también números elementales y se aplican en métodos aritméticos, geométricos y en el álgebra arábiga. La teoría de números es un campo vasto y fascinante de las matemáticas, a veces llamada "aritmética superior", que consiste en el estudio de las propiedades de los números enteros. Primos y descomposición en factores primos son especialmente importantes en la teoría de números, al igual que una serie de funciones, como la función divisor, la función zeta de Riemann, y la función totient[49]. Un número llamado a la historia sin duda fue pi (π), que al principio fue observado como la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, llamado constante de Ludolfo, Legendre demostró que pi es un número irracional y en 1963 mediante una construcción geométrica se da una fracción de aproximación muy aceptable 355/113[50] o $\sqrt{4+[3-\tan(30^{o})]^{2}} = 3.141533...$. Esto aproximó la idea de un círculo como un polígono regular de n número de lados, tan necesaria para el cálculo infinitesimal de Newton. Un problema que también fue famoso es la cuadratura de un círculo, es construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado. El sistema occidental de símbolos numerales 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 evoluciona del Hindú (800 a.C.), Arábigo (900 a.C.), español (1000 a.C.), Italiano (1400 a.C.), las piezas estarían completas cuando se evoluciona del cero Hindú (conjunto vacío[51]) al ***cero Maya*** que representa indeterminación de cantidad[52] (40 a.C.)

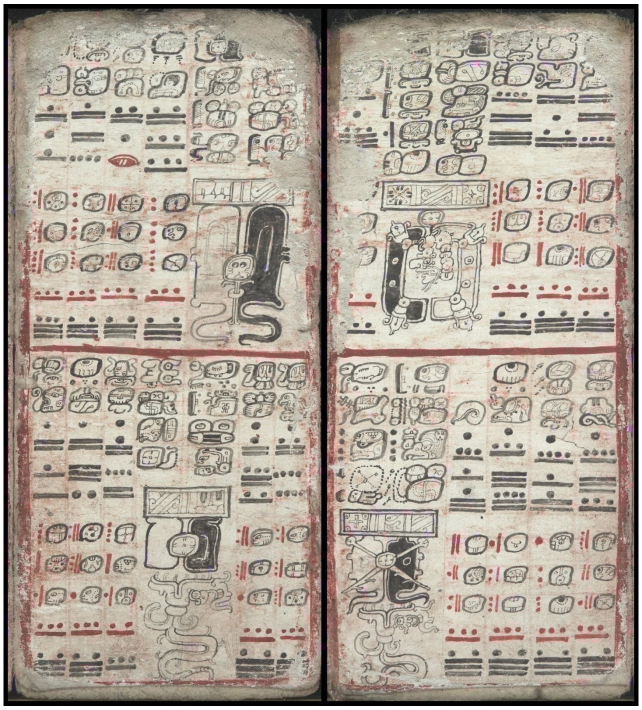
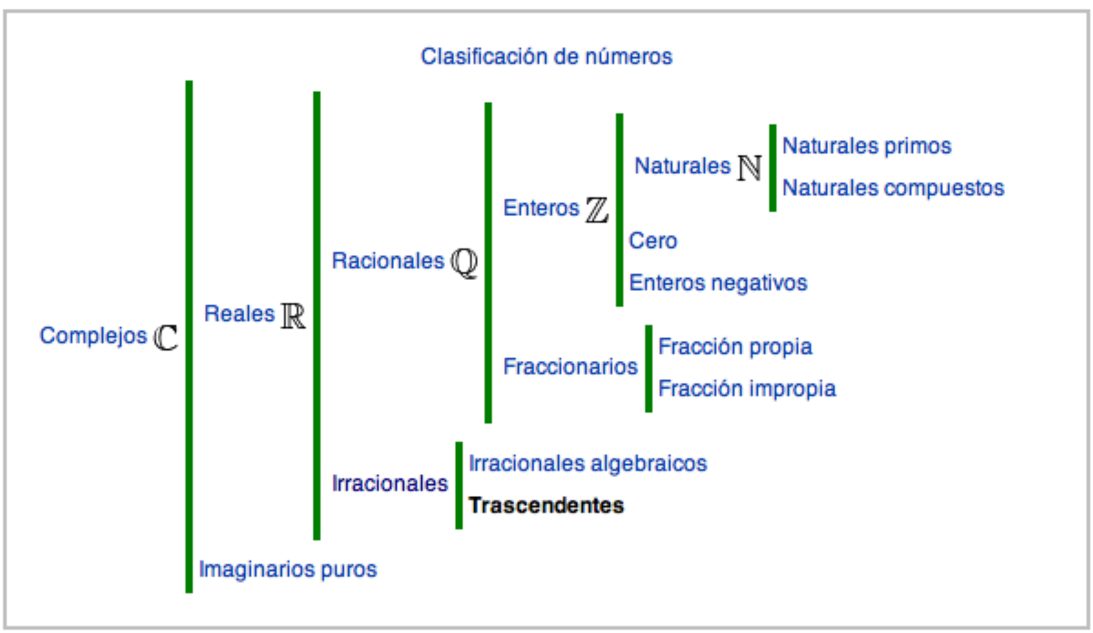


Tabla de Cálculo de los eclipses del códice Dresde, en el cual se puede ver la aplicación del Cero Maya

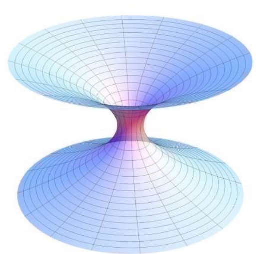


Los números naturales, **N** (enteros positivos) se cree que están de manera innata presentes en los humanos[53], origen genético que da origen a la construcción de las matemáticas, esta capacidad está presente de manera primitiva también en chimpancés y aves[54], se incluye al cero o se excluye al definirlos por algunos matemáticos **N**={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Cuando agregamos a este conjunto los negativos tenemos a los enteros, **Z** (por la palabra alemana Zahlen, números). Los números racionales (**Q**, por la palabra alemana Quotient traducida como cociente) son los que se expresan como una fracción **a/b** donde **a** y **b** son enteros y **b** es diferente de cero, los números enteros también son racionales porque pueden ser expresados con denominador 1, la recta numérica real se forma de la unión de números racionales e irracionales, constituyen los números reales **R**. Los números que son algebraicos son los reales o complejos que satisfacen una ecuación polinómica, son las raíces no cero que satisfacen: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, de lo contrario, se llaman trascendentales a aquellos como pi, e, ln 2, sen (1). Los números complejos **C**, contienen a los **R**, además, a diferencia de los reales incluyen todas las raíces de los polinomios, están formados por una parte real y una imaginaria. Los números **C**, son un cuerpo o campo, en otras palabras son una estructura algebraica cerrada bajo las operaciones de suma y multiplicación, un complejo que denota z= Re(z) + Im(z) o z=a +bi, se le llama puro si solo está formado por la parte imaginaria Im(z), $i = \sqrt{-1}$.

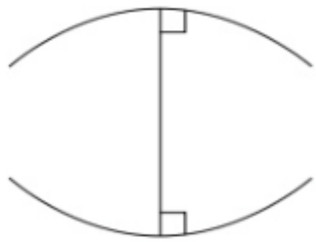
Las matemáticas avanzan más allá de la idea de número, dan lugar a una generalización del mismo en forma de variable algebraica, dando origen a lo que llamamos álgebra, un siguiente nivel de abstracción en la historia de las ficciones platónicas. Aunque la aritmética ya existía, este gran paso supuso el nacimiento del cálculo moderno. Los símbolos representan números, como parte de soluciones de ecuaciones. Las ecuaciones eran recetas babilónicas sobre tablillas de arcilla expresadas en forma geométrica, la palabra viene del árabe al-jabr. Es por ello, que el álgebra de polinomios se le llama álgebra arábiga. El álgebra evoluciona a su siguiente generación llamada abstracta, aparecen nuevas álgebras tales como Banach, Booleana, Borel, Clifford, Cayley, Sigma, Steenrod, Neuman, Umbral, Hecke entre muchas otras. Aunque en la escuela se nos separa a la matemática por conveniencia en: aritmética, álgebra, geometría, teoría de números, …, en realidad la disciplina de ficciones está muy fuertemente unida, muchos avances tecnológicos de hoy se deben a fusiones como la teoría de la información y los campos de los sistemas dinámicos.

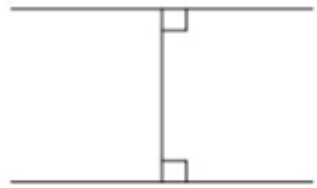
En el campo de la geometría los avances son notables, la geometría euclidiana, los sistemas de coordenadas (polares, rectangulares, esféricos, cilíndricos), la geometría estudia las figuras, los objetos y sus relaciones en el espacio geométrico. Contrasta con el álgebra que estudia cantidades numéricas y soluciones de ecuaciones. En geometría conceptos comunes son: área, ángulo, perímetro, paralelas, perpendicular, esfera, polígono, cilindro, cubo, radio, hipotenusa, triángulo, volumen, dimensiones, circunferencia, curva, punto, recta, parábola, latitud, longitud, trapecio, rectángulo,…, Además, en las geometrías no euclidianas, los ejes de referencia son curvas, como la hipergeometría, elíptica y esférica.

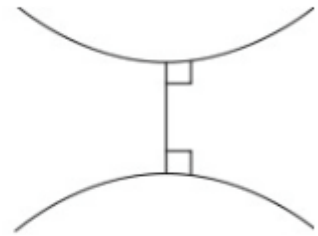
Una geometría no euclidiana, también llamada Lobachevsky-Bolyai-Gauss (**geometría hiperbólica**), con curvatura seccional constante. Esta geometría satisface todos los postulados de Euclides excepto el postulado de las paralelas, que se modifica como sigue: "Para cualquier línea recta infinita y cualquier punto no sobre ella, hay muchas otras que se extienden infinitamente, líneas rectas que atraviesan y que no se cruzan". En esta la suma de los ángulos de un triángulo no es 180º y no hay triángulos semejantes. El espacio hiperbólico más conocido son las esferas de Lorentz de cuatro dimensiones[55], en física son llamados agujeros de gusano de Lorentz[56]'.



La geometría elíptica o llamada Riemann se puede visualizar como la superficie de una esfera en la que las líneas se toman como círculos grandes, en esta la suma de los ángulos de un triángulo es >180º. En cuanto al postulado de las paralelas dice: a través de cualquier punto en el plano, no existen líneas paralelas a una recta dada[57].







Elíptica Euclidiana Hiperbólica

La **geometría esférica** es el modelo en el cual una línea no tiene ninguna línea paralela a través de un punto dado[58]. El ángulo entre dos líneas en la geometría esférica es el ángulo entre los planos de los grandes círculos correspondientes, y un triángulo esférico se define por sus tres ángulos. No existe el concepto de semejanza de triángulos en la geometría esférica[59].

Por otro lado, el álgebra abstracta es el conjunto de temas avanzados del álgebra que tienen que ver con las estructuras algebraicas abstractas, en lugar de los sistemas de números habituales. La más importante de estas estructuras son grupos, anillos y campos. Ramas importantes del álgebra abstracta son el álgebra conmutativa, teoría de la representación y álgebra homológica. Álgebra lineal, la teoría elemental de números y matemáticas discretas a veces se consideran ramas del álgebra abstracta.

Lección 8: Conceptos precursores a la derivada

Isaac Newton escribió a Robert Hooke, por cierto alguien a quién no estimaba mucho, el 5 de febrero de 1676, la frase: "Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes". Es en esta frase que nos inspiramos para abrir nuestra ignorancia a la luz en el ámbito de las matemáticas, hay una gran verdad, la verdad se construye entre todos los que la buscan como fundamento de la visión científica moderna. Newton deja ver que todo conocimiento nuevo es herencia del esfuerzo de predecesores, en su caso Copérnico, Galileo y Kepler. Un hito de las matemáticas es el cálculo infinitesimal, intentaremos hacer de la misma manera una construcción histórica, lingüística y conceptual de la derivada, con el fin de reconocer en ella el primer gran esfuerzo global de la humanidad, aunque para algunos esté claro que Newton y Leibniz son los creadores de este cálculo de infinitesimales, es decir, de tasas de cambio instantáneas. La necesidad obedecía a las fallas de las herramientas matemáticas de cálculo de la época, en su sentido de precisión y exactitud.

El primer hito de la historia lo situamos en el libro de Euclides "Elementos", la interpretación de la derivada tiene como predecesores los conceptos de punto, línea, círculo, curva, función, punto tangente, polígono regular, hipotenusa, plano cartesiano, entre otros.

Un **punto** es lo que no tiene partes.
Una **línea** es una longitud sin anchura.
Los *extremos* de una línea son puntos.

¿El cálculo infinitesimal es exacto o de aproximación?

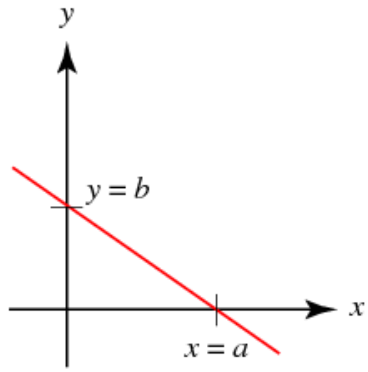
¿Qué clases de infinitesimales?

De rango, de superficie, de volumen, vectoriales, de arco, …

Línea recta

Una **línea recta** es una figura unidimensional que no tiene espesor y se extiende infinitamente en ambas direcciones. Una línea a veces se llama línea recta o, más arcaica, una línea a la derecha, para subrayar que no tiene "distancias negativas" en cualquier lugar a lo largo de su longitud. Mientras que las líneas son intrínsecamente objetos unidimensionales, que pueden estar incrustados en espacios dimensionales más altos, es un borde de un gráfico una "línea". Una línea está unívocamente determinada por dos puntos, y la línea que pasa por los puntos, de manera similar, la **longitud del segmento** de línea finita que termina en estos puntos pueden estar indicados. Una línea también puede estar indicada con una sola letra minúscula, Euclides definió una línea como una "longitud sin anchura", y una línea recta como una línea que "yace por igual respecto de los puntos en sí mismos". Consideremos primero las líneas en un plano bidimensional. Dos rectas en el mismo plano que no se cruzan entre sí se dice que son líneas paralelas. Dos líneas situadas en planos diferentes que no hay intersección entre sí, se dice que son líneas oblicuas.

La línea con intersección **x=a** y la línea con intersección **y=b** vienen dadas por la forma de intersección:



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

La línea a través, $P_1(x_1,y_1)\ y\ P_2(x_2,y_2)$ la pendiente está dada por la forma punto-pendiente

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=Pendiente=m$$

Determinan una ecuación de la recta:

$$ax+by+c=0 \quad donde\ \ a,b\ y\ c\ son\ números\ reales$$

En forma de un sistema lineal:

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ ax_1+by_1+c&=0\\ ax_2+by_2+c&=0 \end{aligned}$$

Este sistema es homogéneo, tiene una solución no trivial sí y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, esto es:

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ ax_1+by_1+c&=0\\ ax_2+by_2+c&=0 \end{aligned}$$

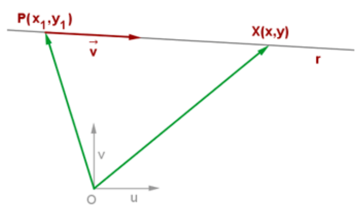
De esta manera, todo punto de la recta satisface al determinante, es decir, pertenece a la recta. Por ejemplo, hallar la ecuación de la recta en los P(-1,-3) y Q(4,6), al sustituir:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar el determinante:

-3x+5y-18=0

Ecuación vectorial de la recta:



P es un punto de la recta **r**, el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene igual dirección de $\vec{v}$, que es un vector dirección sobre **r**, el vector $\overrightarrow{PX}$ es igual al vector $\vec{v}$ multiplicado por un escalar **k**, es decir, el producto interno $k \bullet \vec{v}$

$$\overrightarrow{PX} = k \bullet \vec{v} \quad k \in \mathbb{R}$$
$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = k \bullet \vec{v}$$

Por ejemplo, una recta pasa por el punto X(-1,3) y tiene como vector dirección $\vec{v}$=[2,5]

Su ecuación vectorial de la recta estaría dada por
$$(x,y) = (-1,3) + k \bullet [2,5]$$

Para aproximarnos a la ecuación paramétrica de la recta
$$(x,y) = (x_1,y_1) + k \bullet (v_1,v_2)$$
$$(x,y) = (x_1,y_1) + k \bullet v_1 + k \bullet v_2$$
$$(x,y) = (x_1 + k \bullet v_1, y_1 + k \bullet v_2)$$

La igualdad de vectores es desdoblada en dos igualdades escalares, a esto se le llama ecuación paramétrica de la recta.

$$\begin{cases} x = x_1 + k \bullet v_1 \\ y = y_1 + k \bullet v_2 \end{cases}$$

despejando k

$$k = \frac{x - x_1}{v_1}$$

$$k = \frac{y - y_1}{v_2}$$

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

$$pendiente \;\; m = \frac{v_2}{v_1}$$

Por ejemplo, una recta pasa por el punto X(-1,3) y tiene como vector dirección $\vec{v}$=[2,5] encuentre su **ecuación paramétrica** en función de t:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Dados los puntos X(-1,3) y P(1,8) encuentre la ecuación de la recta en su forma y=mx+b sí =[2,5] aplicando

$$\frac{x - x_1}{v_1} == \frac{y - y_1}{v_2}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5}$$

$$5x + 5 = 2y - 6$$

$$2y = 5x + 11$$

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$$

Una forma vectorial alternativa de la recta es $n \bullet x = n \bullet p$, donde **n** es un vector normal a la recta, **P** es un punto de la recta. El vector **n** se obtiene de los coeficientes de la ecuación de la recta en su forma **x+y=p**

$$-\frac{5}{2}x + y = \frac{11}{2}$$

Por lo tanto, **n** es

$$n=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$$

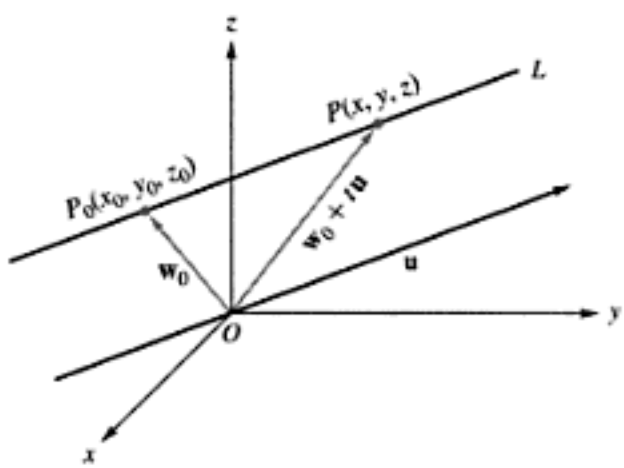
Forma vectorial de la recta.

Otras expresiones útiles son:

Para hallar la distancia al origen de una recta r, ax+by+c=0

$$d(0,r)=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La ecuación paramétrica en R^3,



Donde w_o es el vector asociado con P_0, **x** el vector asociado al punto P(x,y,z). La recta L, que pasa por P_0, y es paralela a **u**, donde **u** es un vector dirección sobre L.

$$\begin{cases}x=x_0+ta\\y=y_0+tb\\z=z_0+tc\end{cases}$$

donde **u**=[a,b,c]

$u = \overrightarrow{P_o P_1}$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Por ejemplo, encuentre las ecuaciones paramétricas para L que pasan por el punto $P_0(-3,2,1)$ y vector dirección u=[2,-3,4]

$$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2-3t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

en su forma L en $\mathbb{R}^3$ es un plano, por lo tanto $n \bullet \overrightarrow{P_o P_1} = 0$, donde **n** es un vector normal al plano L.

n=[a,b,c]

$\overrightarrow{P_o P_1} = (x-x_o, y-y_0, z-z_0)$

donde la ecuación del plano es

ax + by + cz + d=0

Como ejemplo determine una ecuación del plano que pasa por los puntos P(2,-2,1), Q(-1,0,3) y R(5,-3,4) **(método uno).** Elaboramos el sistema de ecuaciones para un plano determinado por tres puntos.

$$2a-2b+c+d=0$$
$$-a+0b+3c+d=0$$
$$5a-3b+4c+d=0$$

Al resolver el sistema

$$a = \frac{8}{17}r$$
$$b = \frac{15}{17}r$$
$$c = \frac{-3}{17}r$$
$$d = r$$

r es cualquier número real, nos conviene r=17.

$$8x+15y-3z+17=0$$

Por un **método dos**, como lo efectuamos para el caso en $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Al operar este determinante nos da:

$$8x + 15y - 3z + 17 = 0$$

Por un **método tres**, a través del producto cruz, y la ecuación plano $n \bullet x = n \bullet P$.

Los vectores $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ están en el plano, ya que los tres puntos están en el plano, entonces el vector **n** normal al plano, $\overrightarrow{P_1P_3}$ x $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [-3,2,2]$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = [3,-1,1]$$

n= $\overrightarrow{P_1P_2} \otimes \overrightarrow{P_1P_2} = [8,15,-3]$

Si utilizamos **n** y el punto P_1, obtenemos la ecuación del plano:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = n \bullet P$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$8(x-2) + 15(y+2) - 3(z-1) = 0$$

$$8x + 15y - 3z + 17 = 0$$

Ejemplo para determinar dos planos cuya intersección es la recta paramétrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

Determinamos la ecuación de la recta en forma simétrica,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z - 5}{4}$$

Entonces la recta dada es la intersección de los planos,

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-2}$$

y

$\frac{x + 2}{3} = \frac{z - 5}{4}$ entonces los planos son,

2x+3y-5=0

y

4x-3z+23=0

Lección 9: Punto en el cálculo infinitesimal

Un **punto** u objeto matemático dimensional cero, se puede especificar en el espacio tridimensional utilizando las coordenadas. Aunque la noción de un punto es intuitivamente bastante clara, la maquinaria matemática usada para tratar con puntos y objetos de puntos, suele ser sorprendentemente compleja. Esta dificultad se encontró nada menos que por el propio Euclides, en sus Elementos, dio la definición vaga de un punto como "lo que no tiene ninguna parte." Las estructuras geométricas básicas de geometría dimensional superior - la línea, el plano, el espacio y el hiperespacio - están construidos de un número infinito de puntos dispuestos de manera particular. Estos hechos llevan a la matemática a un juego de palabras, "sin geometría, la vida no tiene sentido." El punto decimal en una expansión decimal es expresado como "punto".

Los **continuos**, es una propiedad matemática general a la que obedecen los objetos matemáticos en los que todos los elementos se encuentran dentro de una vecindad de puntos cercanos (no hay ausencia de puntos). La designación "continuo" a veces se utiliza para indicar la pertenencia a esta categoría dentro de una función continua. Es necesario citar una generalización del principio de continuidad de Poncelet hecha por H. Schubert en 1874-1879[60]. El ***principio de conservación de número,*** afirma que el número de soluciones de cualquier problema, determinado algebraicamente en cualquier número de parámetros, en virtud de la variación de los parámetros es invariante de tal manera que no hay soluciones que sean infinitas. Schubert le llama a la aplicación de esta técnica, el cálculo de la geometría enumerativa.

La curva y el polígono regular de “n” número de lados

Una **curva** es un continuo unidimensional, es **función continua** de un espacio unidimensional a un espacio tridimensional. En términos generales, la palabra "curva" se utiliza a menudo para referirse a la función gráfica de una curva de dos o tres dimensiones. Las curvas más simples se pueden representar **paramétricamente** en el espacio tridimensional como[61]

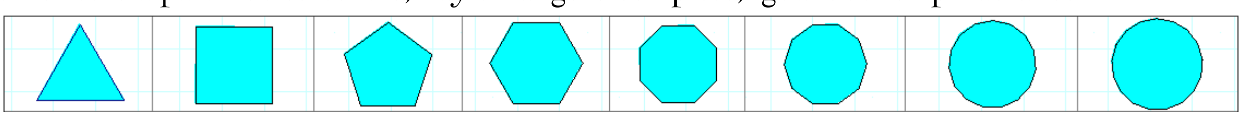
$$x_1 = f_1(t)$$
$$x_2 = f_2(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f_n(t)$$

Otras curvas simples pueden definirse implícitamente, es decir, en la forma:

$$f(x_1, x_2, \cdots) = 0$$

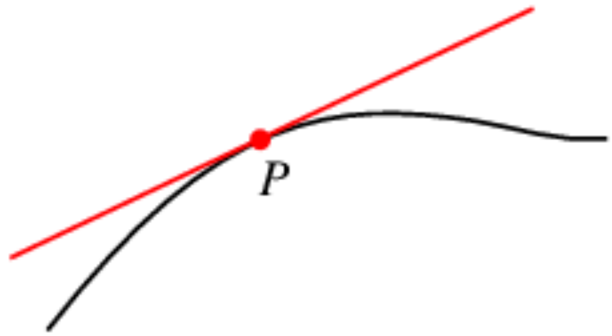
En el **álgebra una curva** es un campo en forma de ecuación, donde el polinomio es una curva cuadrática, cúbica, cuártica, quíntica, séxtica, octava, dodécica, … donde un punto sobre una curva es una solución de la ecuación de la curva.

Cada punto de una curva pertenece a un círculo. Un círculo es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto dado. La distancia desde el centro se llama radio, y el punto se llama centro. Dos veces el radio se conoce como el diámetro. El ángulo subtiende de un círculo a partir de su centro, hay un ángulo completo, igual 360º o 2pi radianes.

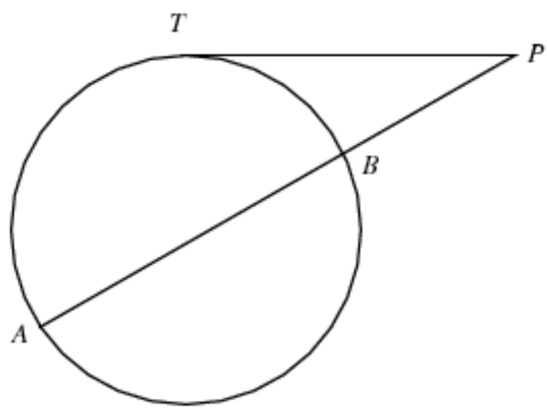


Sin embargo, el cálculo requería un concepto de círculo, más abstracto, uno más útil al concepto de infinito. El polígono regular (lados iguales y ángulos iguales) de **n** número de lados, este nuevo concepto de círculo permite concebir a un punto tangente en una curva, como un segmento de este polígono regular de **n** número de lados, que es parte de una curva.

Una línea recta es tangente a una curva **f(x)** dada en un punto **P** de la curva si la línea pasa a través del punto $P(x_0, f(x_0))$ de la curva y tiene pendiente $\frac{dy}{dx}$, donde es la derivada de $f(x)$. Esta línea se llama línea tangente, o a veces simplemente tangente.

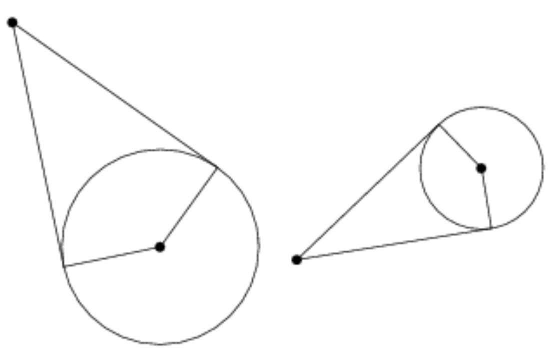


Si **TP** de la curva es un segmento de un círculo, es decir, un lado de un polígono de **n** número de lados, serian el segmento **PT** una prolongación de ese lado del círculo, o recta tangente en **T**, con misma pendiente .



En al figura la línea tangente PT y PA son líneas secantes

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$



En la figura mostramos esta construcción en el infinito. La línea tangente a un círculo de radio **a** con centro en (x_0, y_0)

$x = x_0 + a\cos t$
$y = y_0 + a\ sent$

a través de (0,0) se puede encontrar resolviendo la ecuación

$$\begin{bmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + asent \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a\cos t \\ asent \end{bmatrix} = 0$$

$$t = \pm\cos^{-1}\left(\frac{-ax_0 \pm y_0\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - a^2}}{x_o^2 + y_o^2} \right)$$

Dos de estas cuatro soluciones dan líneas tangentes, como se ilustra arriba, y las longitudes de estas líneas son iguales.

En el espacio euclidiano, la **curva que minimiza la distancia entre dos puntos** es claramente un segmento de línea recta. Esto se puede demostrar matemáticamente como sigue: utilizando cálculo de variaciones y la llamada ecuación diferencial Euler-Lagrange. El elemento línea en $\mathbb{R}^3$ está dada por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

por lo que la longitud del arco entre los puntos x_1 y x_2 es

$$L = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$$

la cantidad que estamos minimizando

$$f = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

sus derivadas

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 0$$

y

$$\frac{\delta f}{\delta y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z'} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$$

por lo que las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0$$

Estas dan

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_1$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_2$$

Tomando la relación,

$$z'=\frac{c_2}{c_1}y'$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+\frac{c_2}{c_1}y'^2}}=c_1$$

$$y'^2=c_1^2[1+y'^2+\frac{c_2}{c_1}y'^2]=c_1^2+y'^2(c_1^2+c_2^2)$$

Lo que da

$$y'^2=\frac{c_1^2}{1-c_1^2-c_2^3}\equiv a_1^2$$

$$z'^2=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 y'^2=\frac{c_2^2}{1-c_1^2-c_2^2}\equiv b_1^2$$

Por lo tanto, y por lo que la solución es la representación paramétrica de una línea recta con el parámetro $x\in[x_1,x_2]$. La verificación de la longitud de arco de a,

$$L=\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}(x_2-x_1)$$

Función

Una función es una relación que asocia únicamente los miembros de un conjunto con los miembros de otro grupo. Más formalmente, una función A de B es un objeto f, de tal manera que cada elemento está asociado únicamente con un objeto. Una función es por lo tanto, una relación de varios a uno (o, a veces uno-a-uno). El conjunto de valores en los que se define una función se llama dominio, mientras que el conjunto de valores de la función que puede producir se llama su rango. El término "mapa" es sinónimo de función.

Desafortunadamente, el término "función" también se utiliza para referirse a las relaciones que asignan puntos individuales en el dominio de los puntos posiblemente múltiples en el rango. Estas "funciones" se llaman funciones de varios valores (o funciones de valores múltiples), y surgen de manera prominente en la teoría de las funciones complejas.

Varias anotaciones son comúnmente utilizadas para representar funciones. La notación más rigurosa es $f : x \to f(x)$, que especifica que la función actúa sobre un solo número (es decir, es univariante, o de una variable) y devuelve un valor. Para ser más precisos, una notación similar $f : \mathbb{R} \to R$, donde $f(x) = x^3$ se utiliza a veces para especificar explícitamente el dominio y el codominio de la función. En ocasiones se asigna el término "mapa" $f : x \to f(x)$ notación que a veces también se utiliza cuando la función está explícitamente considerada como un "mapa".

En términos generales, el símbolo se refiere a la función en sí, mientras que se refiere al valor tomado por la función cuando se evaluó en un punto. Sin embargo, especialmente en más textos de introducción, la notación se usa comúnmente para referirse a la función en sí (en comparación con el valor de la función evaluada en x). En este contexto, el argumento considera que es una variable ficticia cuya presencia indica que la función toma un argumento único (en oposición $f(x,y)$, etc.). Mientras que esta notación es obsoleta por los matemáticos profesionales, es la más conocida, para la mayoría de los no profesionales. Por lo tanto, a menos que se indique lo contrario por el contexto, $f(x)$ la notación se toma en este trabajo como una abreviación de la más rigurosa.

Tipos de funciones

Funciones complejas: una función cuyo rango está en los números complejos, se dice que es una función compleja, o una función de valores complejos.

Mapa es una forma de asociar objetos únicos para cada elemento en un conjunto dado. Así, un mapa $f : A \to B$ donde A de B es una función tal que para cada uno, hay un objeto único. El término función y mapa son sinónimos.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = f(x)$ Hablamos de intervalo

Una **función multivariada**, también conocida como una función de múltiples valores, es una "función" que supone dos o más variables independientes en su dominio. Si bien estas "funciones" no son funciones en el sentido normal de ser de uno a uno o de varios a uno, el uso es tan común que no hay manera para despreciarlo. Al considerar las funciones de varios valores, es necesario hacer referencia a las funciones habituales como un solo valor de la función.

$f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to z = f(x, y)$ Hablamos de superficies

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

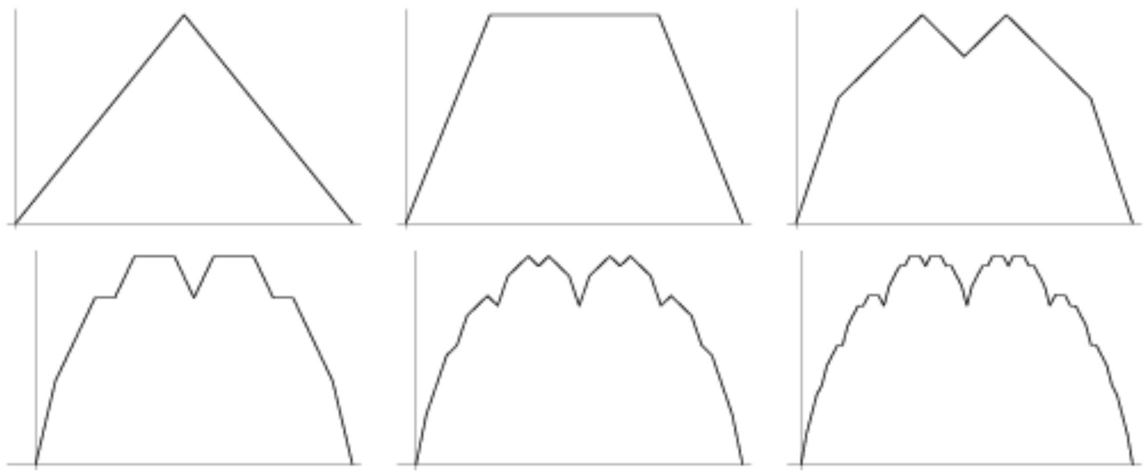
$x, y, w \to z = f(x, y, w)$ Hablamos de volumen

http://www.youtube.com/watch?v=P8QHsN-dS1s

Funciones patológicas

El término "patológico" se utiliza en matemáticas para referirse a un ejemplo concreto preparado para violar ciertas propiedades casi universalmente aceptadas. Problemas patológicos suelen proporcionar interesantes ejemplos de comportamiento contrario a la intuición, además de servir como un excelente ejemplo del por qué de las condiciones necesarias para que muchas afirmaciones matemáticas puedan ser una verdad universal.

Por ejemplo, son las **funciones Blancmange** (curva fractal), son ejemplos de una función continua que no es en ninguna parte diferenciable, una posibilidad que para muchos estudiantes de cálculo parece bastante sorprendente. En los tiempos antiguos, cuando uno inventó una nueva función era para un propósito práctico, hoy se les inventa deliberadamente para parecer defectos en el razonamiento.



Si la lógica fuera la única guía del profesor, sería necesario comenzar con las funciones más generales, es decir, con la más extrañas.

Una función cuyo intervalo está en los números reales se dice que es una **función real**, también llamada una función de valor real.

Una **función de valor simple**, para cada punto en el dominio, tiene un valor único en el rango. Por lo tanto, uno a uno o de varios a uno.

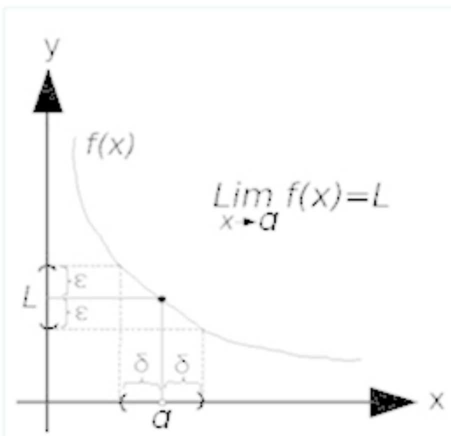
Una **función especial** (por lo general con nombre de un investigador) que tiene un uso particular en la física matemática o alguna otra rama de las matemáticas. Ejemplos destacados incluyen la **función gamma**, **función hipergeométrica**, la **función de Whittaker**, y **Meijer G-función**.

Una **función de cero** es una función que es en todas partes cero.

Las funciones con las que más estamos familiarizados son las **funciones algebraicas** y **trascendentales**. Las primeras son racionales (enteras o polinómicas, y fraccionarias P(x)/Q(x)) e irracionales o complejas. Las trascendentales son trigonométricas, logarítmicas, exponenciales.

Funciones escalares (devuelven un número escalar) y **funciones vectoriales** (devuelven vectores).

Límite



Si es una función para cualquier valor de **x** cerca de **x=a**, sin ser **x=a**, y si **L** es un número real tal que $f(x)$ converge acercándose a **L**, como los valores de **x** son tomados cada vez más cerca de **a**, entonces inferimos que **L** es el límite de $f(x)$ cuando **x** se aproxima en una razón infinitesimal cerca de **a** y esto lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Una función $f(x)$ se dice que tiene un límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\in > 0$, existe una tal $\delta > 0$ (que depende de $\in$) que $|f(x) - L| < \in$. Decimos entonces que el límite **L** está definido para $f(x)$ cuando **x** se aproxima a **a**. Esta forma de definición es a veces llamado una definición épsilon-delta. Es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ expresa que cuando **x** se está aproximando es diferente de **a**, entonces $f(x)$ está cerca de **L**. La función $f(x)$ no es necesario que esté definida en **a**. El límite está relacionado con el comportamiento de funciones cuando **x** está a un paso infinitesimal de **a**, pero no en **a**.

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \in$$

Ejemplo: Mostrar que el $\lim_{x \to 2}(3x-5) = 1$

Demostración.

Método uno:

$$si\ \ 0 < |x-2| < \delta \ \ entonces \ \ |(3x-5)-1| < \in$$
$$si\ \ 0 < |x-2| < \delta \ \ entonces \ \ |(3x-6| < \in$$
$$si\ \ 0 < |x-2| < \delta \ \ entonces \ \ 3|(x-2)| < \in$$
$$si\ \ 0 < |x-2| < \delta \ \ entonces \ \ |(x-2)| < \frac{\in}{3}$$

$$Indica\ \ que\ un\ \ \delta = \frac{\in}{3}$$

Sea $\in > 0$ y definimos $\delta = \frac{\in}{3}$, tenemos entonces que $0 < |x-2| < \delta$

$$\begin{aligned} |(3x-5)-1| &= |3x-6| \qquad donde\ |f(x)-L| \\ &= 3|x-2| \qquad si\, hacemos\ \ \delta = |x-a| = |x-2| \\ &< 3 \bullet \frac{\in}{3} \\ &= \in \end{aligned}$$

Por tanto hemos demostrado

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-5)-1| < \in$$

Si en particular, si $\in = 0.01$, entonces $\delta = \frac{1}{3}(0.01)$, es decir, sería de 0.003333, este valor de δ .

Método dos:

Si evaluamos **x** por encima y por debajo para determinar un δ, donde $\in = 0.01$

$3x_1 - 5 = 0.99 \qquad 3x_2 - 5 = 1.001$

$x_1 = \dfrac{5.99}{3} = 1.996 \qquad x_2 = \dfrac{6.01}{3} = 2.0033$

$\therefore\ 2 - x_1 = 0.0034$ como no hay distancias negativas $|2 - x_2| = 0.0033$

Podemos ver en el manejo de dígitos δ, de modo que elegimos δ =0.0033

$$si\ \ 0 < |x-2| < 0.0033 \ \ entonces \quad |(3x-5)| < 0.01$$

Ejemplo: Mostrar que el $\lim\limits_{x \to 4}(7x-1) = 27$

Demostración.

Método uno:

$$si\ \ 0 < |x-4| < \delta \ \ entonces \quad |(7x-1) - 27| < \in$$

$$si\ \ 0 < |x-4| < \delta \ \ entonces \quad |(7x-28| < \in$$

$$si\ \ 0 < |x-4| < \delta \ \ entonces \quad 7|(x-4)| < \in$$

$$si\ \ 0 < |x-4| < \delta \ \ entonces \quad |(x-2)| < \frac{\in}{7}$$

$$Indica\ \ que\ un\ \ \delta = \frac{\in}{7}$$

Sea $\in > 0$ y definimos $\delta = \dfrac{\in}{7}$, tenemos entonces que $0 < |x-4| < \delta$

$$\begin{aligned} |(7x-1) - 27| &= |7x - 28| \qquad donde\ |f(x) - L| \\ &= 7|x-4| \qquad si\, hacemos\ \ \delta = |x-a| = |x-4| \\ &< 7 \bullet \frac{\in}{7} \\ &= \in \end{aligned}$$

Por tanto hemos demostrado

$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(7x-1) - 27| < \in$

Si en particular, $\in = 0.01$, entonces $\delta = \dfrac{1}{7}(0.01)$, es decir, sería de 0.001428 este valor de δ .

Método dos:

Si evaluamos **x** por encima y por debajo para determinar un δ, donde $\in = 0.01$
$7x_1 - 1 = 26.99 \qquad 7x_2 - 1 = 27.01$

$x_1 = \dfrac{27.99}{7} = 3.9985 \quad x_2 = \dfrac{28.01}{7} = 4.0014$

$\therefore\ 4 - x_1 = .0015$ como no hay distancias negativas $|4 - x_2| = 0.0014$

Podemos ver en el manejo de dígitos δ, de modo que elegimos δ =0.0014
$si\ \ 0 < |x - 4| < 0.0014 \ \ entonces \quad |(7x - 1)| < 0.01$

Los límites pueden ser tomados desde abajo
$\lim\limits_{x \to a^-} = \lim\limits_{x \uparrow a}$

o desde de arriba
$\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \downarrow a}$

Si las dos son iguales, a continuación, el límite se dice que existe
$\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \to a^-} = \lim\limits_{x \to a^+}$

Un **límite inferior h**
$lower \lim\limits_{n \to \infty} S_n = h$

Se dice que existe si por cada uno $\in > 0, |S_n - h| < \in$, para un número infinito de valores **n** y sí no hay ningún número **h** más menor que tiene esta propiedad.

Un **límite superior k**
$upper \lim\limits_{n \to \infty} S_n = k$

Se dice que existe sí, por cada uno $\in > 0, |S_n - k| < \in$, para un número infinito de valores **n** y si no hay ningún número **h** más grande que tiene esta propiedad.

Formas indeterminadas límite del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ y $\dfrac{0}{0}$ con frecuencia se pueden calcular con la regla de L'H$\hat{n}$pital. Los tipos 0 y se pueden convertir a la forma $\dfrac{0}{0}$ por escrito,

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

Tipos, 0^0, ∞^0, 1^∞ y $\frac{0}{0}$ son tratados mediante la introducción de una variable dependiente,

$$y=f(x)^{g(x)}$$

de modo que
$$\ln y=g(x)\ln[f(x)]$$

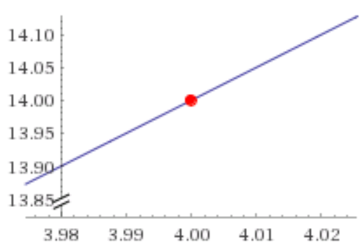
luego se calcula el límite. El límite original, entonces es igual, $e^{\lim(\ln(y))}$
$$L=\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(\ln y)}$$

La forma indeterminada ∞, $-\infty$ es también frecuente.

Ejemplos, determine los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(5x-6)$

Solución: cuando **x** está cerca de 4, 5x-6 está cerca de (5x4)-6=14, escribimos
$$\lim_{x\to 4}(5x-6)=14$$



(x from 3.98 to 4.02)

b) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{(x^2-x-6)}{x-3}\right)$

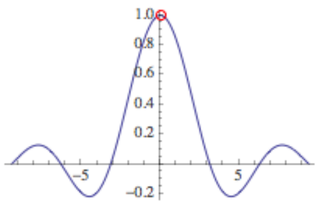
Factor [x^2-x-6]

=(x-3)(x+2)

Limit [(x^2-x-6)/(x-3), x->4]
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x^2-x-6)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}\right)=6$$

c) $\lim_{x \to 0}(sen(x)/x)$

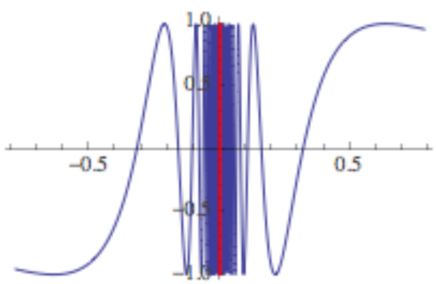
Para este ejemplo no hay método algebraico para simplificarlo, lo haremos con calculadora electrónica



$\lim_{x \to 0}(sen(x)/x) = 1$

d) $\lim_{x \to 0}(sen(1/x)$

Escoja una sucesión de números que se aproxime a 0, los valores oscilarán mucho, $\lim_{x \to 0}(sen(1/x) = \textit{no está definido el límite}$



Por la gráfica podemos concluir que no hay en la aproximación ningún número L cuando se acerca a cero, no existe el límite.

Aplicando regla de L'H$\hat{n}$spital

Sí $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, en donde **f** y **g** son derivables en un entorno de **a** y existe, este $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ límite coincide con $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Teoremas

Para hacer la obtención del límite de una función sin tener que recurrir cada vez a la definición Epsilón-Delta se utilizan los siguientes teoremas:

Teorema 1:

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces
$\lim_{x \to a}(mx+b) = ma+b$

Demostración:

$si \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\; entonces \;\; |(mx+b)-(ma+b)| < \in$

$si \;\; |(mx+b)-(ma+b)| = |(mx-ma)| = m|x-a|$

$si \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\; entonces \;\; m\,|(x-a| < \in$

$entonces \;\; si \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\; entonces \;\; |(x-a| < \frac{\in}{|m|}$

$\delta = \frac{\in}{|m|}$

Teorema 2:

Sea **a** una constante, entonces
$\lim_{x \to c}(a) = a$

Teorema 3:
$\lim_{x \to a}(x) = a$

Teorema 4:
$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm G$

$\lim_{x \to a}(f(x) \bullet g(x)) = L \bullet G$

$\lim_{x \to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = (\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}) = \frac{L}{G}$

$\lim_{x \to a}(cf(x)) = cL$ Donde c es una constante

Teorema 5:
$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = L^n$

Teorema 6:
$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Continuidad de una función en un valor de **x**, sea **a** ese número, $f(x)$ es continua si cumple con tres condiciones:

$a) f(a) \quad existe$

$b) \lim_{x \to a} f(x) \; existe$

$d) \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Aplicación de los teoremas

Ejemplo 1: Encontrar

a) $\lim_{x \to 2} (\frac{x}{5x+2}) = (\frac{\lim_{x \to 2}(x)}{\lim_{x \to 2}(5x+2)}) = \frac{2}{5(2)+2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) $\lim_{x \to 3} (3x-2)$

c) $\lim_{x \to 2} (x^3 + x^2 + 2x)$

d) $\lim_{x \to 2} (\frac{x}{5x+2})$

e) $\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^3+2x+5}{x^2+3}}$

f) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-27}{x-3}$

g) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2-5}{2t^3-6}$

h) $\lim_{s \to 1} \frac{s^3-1}{s-1}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

j) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

k) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^3+14x-3}$

Soluciones:

a) $\lim_{x\to 3}(41) = 41$

b) $\lim_{x\to 3}(3x-2) = (3(3)-2) = 7$

c) $\lim_{x\to 2}(x^3 + x^2 + 2x) = (2^3 + 2^2 + (2) = 14$

$$\lim_{x\to 2}(\frac{x}{5x+2}) = (\frac{\lim_{x\to 2}(x)}{\lim_{x\to 2}(5x+2)}) = \frac{2}{5(2)+2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

e) $$\lim_{x\to 5}\sqrt{\frac{x^3+2x+5}{x^2+3}} = \sqrt{\frac{\lim_{x\to 5}(x^3+2x+5)}{\lim_{x\to 5}(x^2+3)}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 5}(x^3+2x+5)}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{140}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{5}$$

f) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 4}(x^2+3x+9) = 27$$

g) $$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-5}{2t^3-6} = \frac{\lim_{t\to 2}(t^2-5)}{\lim_{t\to 2}(2t^3-6)} = -\frac{1}{\lim_{t\to 2}(2t^3-6)} = -\frac{1}{22}$$

h) $$\lim_{s\to 1}\frac{s^3-1}{s-1} = \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s-1)} = \lim_{s\to 1}(s^2+s+1) = 3$$

i) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{(\lim_{x\to 1}x^{2/3}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0} \; \textit{usando la regla L'Hospital's}$$

j) $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d\sqrt[3]{x+1}-1}{dx}}{\frac{dx}{dx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(x+1)^{2/3}} = \frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(\lim_{x\to 0}(x+1)\right)^{2/3}}\right] = \frac{1}{3}$$

k) $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^3+14x-3}=\frac{\lim_{x\to -3}(2x^3-5x^2-2x-3)}{\lim_{x\to -3}(4x^3-13x^3+14x-3)}=\frac{96}{\lim_{x\to -3}(4x^3-13x^3+14x-3)}=\frac{16}{45}$$

URL's

Xah Math, diccionario visual de espacios planos curvos

http://xahlee.info/math/math_index.html

Materials for the History of Statistics

http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/welcome.htm

The MacTutor History of Mathematics archive

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/

Calculus on the Web

http://cow.math.temple.edu/~cow/cgi-bin/manager

Leyes de cosenos

http://www.usamts.org/Images/Side8.swf

Recursos federales para la excelencia de la educación

http://free.ed.gov/index.cfm

Arte matemático

http://www.wackerart.de/index.html http://www.fractaldomains.com/downloads/

Aplicaciones y recursos

http://education.wolfram.com

http://mathworld.wolfram.com

http://www.sciencedirect.com/science/journal/03150860/20/2

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/sphere.html

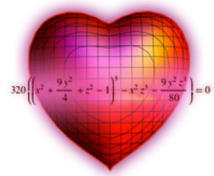
Glosario

Algoritmia:		Es un conjunto ordenado y finito de operaciones lógicas y conceptos que permiten encontrar la solución a un problema abordable racionalmente.
Axioma:		Proposiciones primitivas cuya validez es evidente. Su origen es por intuición.
Cálculo:		Nuestros cerebros están habilitados para calcular, las matemáticas están interesadas en el ideal de verdad concreta.
Código:		Representación de la realidad como estructuras de información.
Curva plana:		Es una curva que se encuentra en un solo plano. Una curva plana puede ser cerrada o abierta. Curvas que son interesantes por alguna razón y cuyas propiedades han sido investigadas son llamados "especiales". Algunas de las curvas abiertas más comunes son la línea, parábola, hipérbola y algunas de las curvas cerradas más comunes son el círculo y la elipse.

Demostración:		Es un argumento coherente basado en métodos de razonamiento puramente lógico formal, que permite inferir la validez de una confirmación matemática, que parte de afirmaciones concretas primitivas conocidas como axiomas. Esto deriva en teoremas.
Descartes:		Filósofo que ve en la razón la única luz que hace posible el conocimiento que produce la ciencia.
Geometría sólida:		Tiene que ver con los poliedros, esferas, sólidos tridimensionales como aviones, coches, etc[62].
Kant:		Filósofo que expresó que las matemáticas son creadas a partir de la intuición como forma evidente de verdad por inducción.
Matemática trascendental:		Las matemáticas son una actividad humana, la vida interior de las matemáticas está en las mentes brillantes de los matemáticos. Es una aproximación al conocimiento humano.
Método matemático:		Formalismo para expresar el comportamiento de entidades ideales en el espacio geométrico, algebraico, lógico, de probabilidad o de la información.
Modelo matemático:		Describe teóricamente un objeto que existe fuera del mundo platónico de idealizaciones, es decir, en el mundo físico, biológico, químico, ...
Objetividad matemática:		Evaluación de la verdad matemática, demostración formal que aporta un argumento válido para la comunidad matemática, son enunciados proposicionales que derivan en compatibilidad, es decir, en la ausencia de inconsistencias o contradicciones.
Objeto matemático:		Su existencia pertenece al mundo platónico de las formas matemáticas, son intemporales y son razones puras en el sentido de la lógica formal.

Pedagogía:		Ciencia que tiene como objeto el fenómeno complejo de la educación.
Postulado:		Una declaración, también conocida como un axioma, que se toma para ser verdad sin pruebas. Postulados son la estructura básica de la cual lemas y teoremas se derivan. El conjunto de la geometría euclidiana, por ejemplo, se basa en cinco postulados conocida como postulados de Euclides.
Teoremas:		Afirmación que fue demostrada y puede ser de nuevo demostrada.

Lección 10: Álgebra



Expresiones algebraicas

Cuando un problema de cálculo se nos presenta una y otra vez, conviene algebrarlo, los matemáticos crearon un cuerpo o campo **T** bajo la propiedad de cerradura, es decir, cerrado bajo operación binaria (+, x); llamado álgebra. La idea del álgebra es que una vez que hayamos resuelto un problema, se puedan generalizar sus soluciones para similares situaciones. Suponemos que usted ya está familiarizado con un álgebra, por lo menos con la aritmética, que opera solo números bajo la operación binaria de adición y multiplicación.

En el álgebra arábiga, a los símbolos x,y,z, se les llama expresiones variables. La letra x, por ejemplo, a menudo expresa la generalización de una cantidad numérica. Es decir, la x puede expresar una incógnita para la cual enunciamos "para una **x expresada dentro de una proposición de notación matemática**".

Las propiedades que cumple un cuerpo T con elementos escalares x,y,z, ... en el que se define por dos operaciones: la adición (+) y la multiplicación (·) son:

(+) $x + y$: es un elemento de T, cerradura.

(+) $y + x = x + y$: conmutativa

(+) $(y + z) + x = y + (z + x)$: asociativa

(+) **El cero**, constituye el único **elemento neutro** de T: $x + 0 = x$

(+) La **simetría para cada elemento respecto al cero** es única en T. $x + (-x) = 0$

(·) $\mathbf{x \cdot y = y \cdot x}$: conmutativa, $5 \times 3 = 3 \times 5$

(·) $\mathbf{x \cdot y \cdot z = x \cdot (z \cdot y)}$: asociativa. $3 \times (2 \times 4) = (3 \times 2) \times 4$

(·) en el cuerpo T solo existe un **elemento neutro unidad**: $x \cdot 1 = x$

(·) a cada elemento no nulo de T corresponde un simétrico $\mathbf{x^{-1}\ x = 1}$.

(·) la multiplicación frente a la adición es distributiva:

$$\mathbf{x\,(y + z) = xy + xz}$$

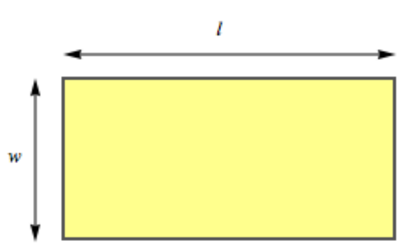
El uso de variables ofrece ventajas con respecto a la solución de cada problema "desde cero":

Se permite que la formulación general de leyes aritméticas tales como $x-1-y=y+1-x$; para todos los números reales x y y.

Se permite la referencia a los números desconocidos, por ejemplo: encontrar un número x tal que $8x+3=1$.

Ejemplo 1

Escribe una expresión algebraica para el perímetro y el área del rectángulo de la siguiente manera.



Para encontrar el perímetro, añadimos las longitudes de los lados. Podemos empezar en la parte superior izquierda y trabajar hacia la derecha. El perímetro, P, es por lo tanto:

$P = l + w + l + w$

Estamos añadiendo dos l y dos l . Diríamos que:
$P = 2l + 2w$

El área es la longitud multiplicada por el ancho. En términos algebraicos se obtiene la expresión:

$$A = l \times w; o\ A = l \cdot w; o\ A = lw$$

Evaluación de una expresión algebraica

Cuando se nos da una expresión algebraica, una de las cosas más comunes es evaluarla para un cierto valor dado de las variables. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

Ejemplo 2

Para x = 12 . Evaluar la expresión: 2x - 7.

Para encontrar la solución, sustituir 12 por x en la expresión dada. Cada vez que vemos x lo reemplazaremos con 12. Nota: En esta fase se coloca el valor en paréntesis:

$$\begin{aligned}2x-7&=2(12)-7\\&=24-7\\&=17\end{aligned}$$

La razón por la que ponemos el valor sustituido entre paréntesis es doble:

1. Esto lo hará más fácil para usted en ejemplos a seguir.
2. Se evita cualquier confusión que pudiera surgir de dejar caer un signo de multiplicación: $2\bullet 12=2(12)\neq 212$.

Ejemplo 3

Sea x = -1. Encuentra el valor de -9x + 2.

Solución:

$$\begin{aligned}-9(-1)+2&=9+2\\&=11\end{aligned}$$

Ejemplo 4

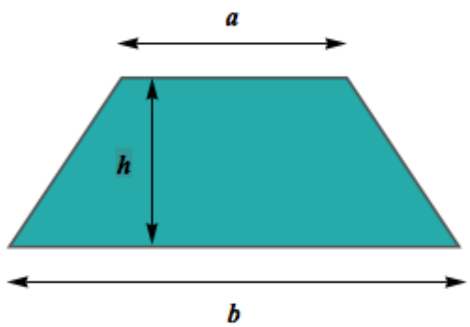
Sea y=-2. Encuentre el valor de $\frac{7}{y}-11y+2$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{7}{(-2)}-11(-2)+2&=-\left(\frac{7}{2}\right)+22+2\\&=-\left(\frac{7}{2}\right)+24\\&=-\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{48}{2}\right)\\&=\frac{41}{2}\end{aligned}$$

Muchas expresiones tienen más de una variable en ellas. Por ejemplo, la fórmula para el perímetro de un rectángulo en la introducción tiene dos variables: la longitud (l) y la anchura (w). En estos casos, debe tener cuidado de sustituir el valor adecuado en el lugar apropiado.

Ejemplo 5



El área de un trapecio está dada por la ecuación $l = \frac{h}{2}(l + l)$. Calcula el área de un trapecio con dimensiones a = 10 cm, b = 15 cm y altura h = 8 cm.

Para encontrar la solución a este problema, simplemente tomemos los valores dados para las variables a, b y h e introducirlas en la expresión para A:

$A=\frac{h}{2}(a+b)$ 10 para sustituir a, 15 para b, y 8 para h.

$A=\frac{8}{2}(10+15)$ Evaluar pieza por pieza. $(10+15)=25; \frac{8}{2}=4A=4(25)=100$.

Solución: El área del trapecio es 100 centímetros cuadrados.

Ejemplo 6

Encontrar el valor $\frac{1}{9}(5x+3y+z)$ de cuando x=7, y=-2 y z=11 .

Vamos a sustituir los valores de **x, y, z** y luego evaluar la expresión resultante.

$\frac{1}{9}(5(7)+3(-2)+(11))$ Evaluar las condiciones individuales dentro de los paréntesis.

$\frac{1}{9}(35-6+11)$ Combinar términos dentro del paréntesis.

$\frac{40}{9} \approx 4.4444$

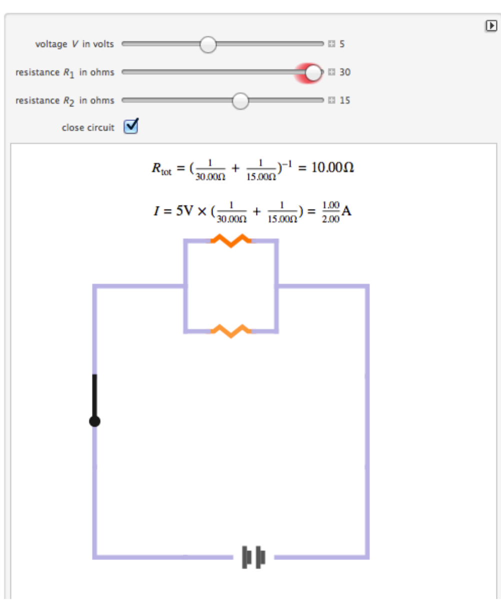
Solución: ≈ 4.4444 (redondeada a la centésima más próxima).

Ejemplo 7

La resistencia total de dos componentes electrónicos conectados en paralelo está dada por

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

donde el subíndice [R_1] y subíndice [R_2] son las resistencias individuales (en ohmios) de los dos componentes. Encontrar la resistencia combinada de dos componentes cableados si sus resistencias individuales son 30 ohmios y 15 ohmios. Con voltaje V=5.



http://demonstrations.wolfram.com/ResistorsInParallel/

La corriente en un circuito se puede calcular usando la ley de Ohm: $I = \frac{V}{R}$, la corriente eléctrica I, es directamente proporcional al voltaje e inversa a la resistencia. En este circuito simple, las dos resistencias están en paralelo, por lo que el recíproco de la resistencia efectiva, es la suma de las inversas de las resistencias. Esto puede deducirse del hecho de que la corriente se divide por igual entre las dos resistencias. La corriente es entonces

I= $V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$. No hay corriente cuando el circuito está abierto.

Evaluación algebraica de expresiones exponenciales

Muchas fórmulas y ecuaciones en matemáticas contienen exponentes. Los exponentes se utilizan como una notación para representar la multiplicación repetida. Por ejemplo:

$3 \bullet 3 = 3^2$

$3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^3$

El exponente representa cuántas veces el número se utiliza como un factor (multiplicado). Cuando tratamos con números enteros, es normalmente más fácil simplificar la expresión. Simplificamos:

$$3^3 = 27$$

y

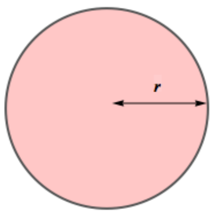
$$2^4 = 16$$

Sin embargo, necesitamos exponentes cuando trabajamos con variables, ya que es mucho más fácil de escribir x^9 que $x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x$.

Para evaluar expresiones con exponentes, sustituimos los valores que se dan para cada variable y así logramos simplificar. Es especialmente importante en este caso para sustituir el uso de paréntesis con el fin de asegurarse que la simplificación se hace correctamente.

Ejemplo 8

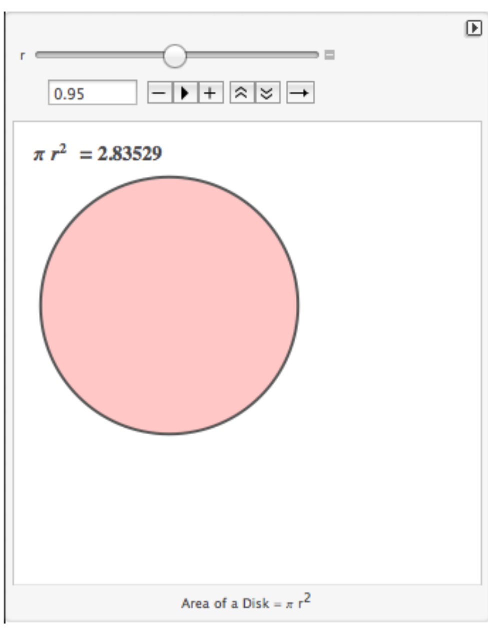
La fórmula del área de un círculo es dada por $A = \pi r^2$. Calcule el área del círculo de radio r=0.95 pulgadas.



Sustituimos y evaluamos en la ecuación la variable.

$A = \pi r^2$ Sustituimos .95 por r.

$A = \pi(.95)^2 = \pi \bullet (.95) \bullet (.95) = 2.83529$

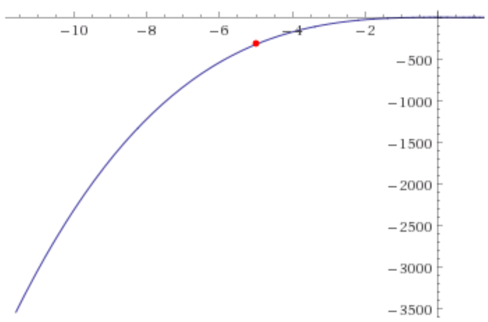


Ejemplo 9

Encuentre el valor $2x^3 - 3x^2 + 5$ para $x = -5$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 5 &= 2(-5)^3 - 3(-5)^2 + 5 \\ &= 2(-125) - 3(25) + 5 = -320 \end{aligned}$$

Nótese que cuando el exponente es par la cantidad siempre será positiva, en caso de ser impar, será negativa.



Ejercicios 1:

a) Escribe lo siguiente en una forma más condensada, dejando fuera un símbolo de multiplicación.

1. $3 \bullet 5x$
2. $1.35 \bullet y$
3. $3 \bullet \frac{1}{5}$
4. $\frac{1}{5} \bullet y$

b) Evaluar las siguientes expresiones para a = -3, b = 2, c = 5, y d = -4.

5. 2a+3b
6. 4c+d
7. 5ac -2b
8. (2a)/(c - d)
9. (3b)/d
10. (a - 4b)/(3c + 2d)
11. $\frac{1}{(a+b)}$
12. $\frac{ab}{cd}$

c) Evaluar las siguientes expresiones para x = -1, y = 2, z = -3, y w = 4.

13) $8x^3$

14) $\frac{5x^2}{6z^3}$

15) $3z^2 - 5w^2$

16) $x^2 - y^2$

17) $\frac{z^3 + w^3}{z^3 - w^3}$

18) $2x^2 - 3x^2 + 5x - 4$

19) $4w^3 + 3w^2 - w + 2$

20) $3 + \frac{1}{z^2}$

Resultados:

1) $15x$

2) $1.35y$

3) $\frac{3}{5}$

4) $\frac{y}{5}$

5) 0

6) 16

7) -79

8) -2/3

9) -3/2

10) -11/7

11) -1

12) -3/10

13) -8

14) -5/162

15) -53

16) -3

17) -37/91

18) -10

19) 302

20) 28/9

Lección 11: Orden de operadores

Observar y evaluar la siguiente expresión:

$$2+4\times7-1=?$$

¿De cuántas maneras diferentes podemos interpretar este problema, y cuántas respuestas diferentes podría posiblemente encontrar alguien para ello? La forma más sencilla de evaluar la expresión es simplemente comenzar a la izquierda y su forma de trabajo a través de hacer el seguimiento del total de la marcha:

$$2+4=6$$
$$6\times7=42$$
$$42-1=41$$

Si se introduce la expresión en una calculadora no-científica, es probable obtener 41 como la respuesta. Si, por el contrario, se va a escribir la expresión en una calculadora científica o software de matemáticas, es probable obtener 29 como respuesta.

En matemáticas, el orden en el que llevamos a cabo las distintas operaciones (tales como sumar, multiplicar, etc.) es importante. En la expresión anterior, la operación de la multiplicación tiene prioridad sobre la suma, por lo que la evaluamos a esta primero. Vamos a reescribir la expresión, pero haciendo uso de este criterio para la multiplicación entre paréntesis para indicar que va a ser evaluado primero.

$$2+(4\times7)-1=?$$

Así que al evaluar primero el paréntesis: $4 \times 7 = 28$. Nuestra expresión se convierte en:

$$2+(28)-1=?$$

Cuando no tenemos más que la suma y la resta, se comienza a la izquierda y seguido de la del total, vemos:

$$2+28=30$$
$$30-1=29$$

Estudiantes de álgebra a menudo utilizan la palabra "PEMDAS" para ayudar a recordar el orden en que se evalúan las expresiones matemáticas: paréntesis, exponentes, multiplicación, división, adición o suma y sustracción o resta.

Operador paréntesis

- Evaluar expresiones dentro de signos de agrupación como los *paréntesis* (también los corchetes [] y/o llaves {}) en primer lugar.
- Evaluar todos los *exponentes* (términos al cuadrado o al cubo como 3^2 o 2^3) siguientes.
- En trabajo de izquierda a derecha completar tanto la *multiplicación* y la *división* en el orden en que aparecen.
- Por último, evaluar *adición* y *sustracción*. El trabajo de izquierda a derecha completando tanto la suma y resta en el orden en que aparecen.

Evaluar expresiones algebraicas con signos de agrupación

El primer paso en el orden de las operaciones se llama paréntesis, pero incluye todos los símbolos de agrupación en este paso. A pesar de que en su mayoría se utilizan paréntesis (). En este texto, usted también puede ver corchetes [] y llaves {}, y se deben incluir como parte de la primera etapa.

Ejemplo 1

Evalúe lo siguiente:

a) 4-7-11+2

b) 4-(7-11)+2
c) 4-[7-(11+2)]

Solución:

Cada una de estas expresiones tiene los mismos números y operaciones, en el mismo orden. Echemos un vistazo a cómo se evalúa cada uno de estos ejemplos.

a) Esta expresión no tiene paréntesis. "PEMDAS" establece el orden en que tratamos la suma y resta como aparecen, empezando por la izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} 4-7-11+2 &= -3-11+2 \\ &= -14+2 \\ &= -12 \end{aligned}$$

b) Esta expresión tiene paréntesis. En primer lugar, evaluar 7 - 11 = -4. Recuerde que cuando se resta un punto negativo es equivalente a añadir un positivo.

$$\begin{aligned} 4-(7-11)+2 &= 4-(-4)+2 \\ &= 8+2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

c) Los corchetes se utilizan a menudo para expresiones de grupos que ya contienen paréntesis. Esta expresión tiene dos corchetes y paréntesis. El grupo más interior primero, (11 + 2) = 13. A continuación, complete la operación en los corchetes.

$$\begin{aligned} 4-[7-(11+2)] &= 4-[7-(13)] \\ &= 4-[-6] \\ &= 10 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Evalúe lo siguiente:

$a)\ 3\times 5-7\div 2$
$b)\ 3\times(5-7)\div 2$
$c)\ (3\times 5)-(7\div 2)$

a) No hay signos de agrupación. "PEMDAS" dicta que evaluar la multiplicación y la división primero, trabajando de izquierda a derecha: 3 x 5 = 15, 7/2 = 3.5:

$$\begin{aligned} 3\times 5-7\div 2 &= 15-3.5 \\ &= 11.5 \end{aligned}$$

b) En primer lugar, se evalúa la expresión entre paréntesis: 5 - 7 = -2. Entonces trabaje de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} 3\times(5-7)\div 2 &= 3\times(-2)\div 2 \\ &= (-6)\div 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

c) En primer lugar, se evalúa la expresión entre paréntesis: 3 x 5 = 15, 7/2 = 3.5. Entonces trabaje de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} (3\times 5)-(7\div 2) &= 15-3.5 \\ &= 11.5 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que en la parte (c), el resultado no se modificó mediante la adición de paréntesis, pero la expresión parece más fácil de leer.

Algunas expresiones no contienen paréntesis, otras contienen muchas series de estos. A veces las expresiones tendrán un conjunto de paréntesis dentro de otro conjunto de paréntesis. Cuando se enfrentan con paréntesis anidados, comience en los paréntesis más internos y trabájelos hacia afuera.

Ejemplo 3

Utilice el orden de las operaciones para evaluar:

$$8-[19-(2+5)-7]$$

Usando "PEMDAS"

Solución:

$$\begin{aligned}8-(19-(2+5)-7) &= 8-(19-7-7)\\ &= 8-5\\ &= 3\end{aligned}$$

En álgebra, se utiliza el orden de las operaciones cuando estamos sustituyendo los valores en las expresiones de variables.

En estas situaciones se nos dará una expresión que incluye una variable o variables, y también los valores para sustituir.

Ejemplo 4

Utilice el orden de las operaciones para evaluar lo siguiente:

$$a)\ 2-(3x+2)\ \ cuando\ \ x=2$$

$$b)\ 3y^2+2y-1\ \ cuando\ \ y=-3$$

$$c)\ 2-(t-7)^2\times(u^3-v)\ \ cuando\ \ t=19;\ u=4;\ y\ \ v=2$$

Solución:

a) El primer paso es sustituir el valor de la expresión. Vamos a ponerlo entre paréntesis para aclarar la expresión resultante.

$2-(3(2)+2)$ es lo mismo que 3x2

$2-(3\times 2+2)=2-(6+2)$
$2-8=-6$

b) El primer paso consiste en sustituir el valor para **y** en la expresión.
$3\times(-3)^2+2x(-3)-1$
$=3\times(-3)^2+2\times(-3)-1$
$=3\times(9-6)-1$
$=27-6-1$
$=20$

c) El primer paso es sustituir los valores de **t, u, v** en la expresión.

$2-(19-7)^2\times(4^3-2)$

Usando "PEMDAS":

$=2-(12)^2\times 62$
$=2-12^2\times 62$
$=2-144\times 62$
$=2-8928$
$=-8926$

En las partes (b) y (c), dejamos los paréntesis alrededor de los números negativos para clarificar el problema. No afecta al orden de las operaciones, pero sí ayuda a evitar confusión cuando se multiplican los números negativos.

El inciso (c) en el último ejemplo muestra otro punto interesante. Cuando tenemos una expresión dentro de los paréntesis, se utiliza "PEMDAS" para determinar el orden en que se evalúan los contenidos.

Evaluación de expresiones con fracciones

Las fracciones cuentan como símbolos de agrupación para PEMDAS, y por lo tanto deben ser evaluadas en el primer paso de la solución de una expresión. Todos los numeradores y denominadores pueden ser tratados como si tuvieran paréntesis invisibles. Cuando paréntesis reales también están presentes, recuerde que los símbolos de agrupación más internos deben evaluarse primero. Si, por ejemplo, los paréntesis aparecen en el numerador, ellos tienen prioridad sobre la barra de fracción. Si los paréntesis aparecen fuera de la fracción, la barra de fracción tiene prioridad.

Ejemplo 5

Utilice el orden de las operaciones para evaluar las siguientes expresiones:

$a)\ \frac{z+3}{4}-1\ \ con\ \ z=2$

$b)\left(\frac{a+2}{b+4}-1\right)+b\ \ con\ \ a=3\ y\ b=1$

$c)\ 2\left(\frac{w+(x-2z)}{(y+2)^2}-1\right)\ \ con\ \ w=11;\ x=3;\ y=1;\ \ z=-2$

Solución:

a) Sustituimos el valor de 2 en la expresión.

$$\frac{2+3}{4}-1$$

Aunque esta expresión no tiene paréntesis, vamos a reescribir para mostrar el efecto de la barra de fracción.

$$\frac{(2+3)}{4}-1$$

Usando PEMDAS, primero evaluar la expresión en el numerador.

$$\frac{5}{4}-1$$

Podemos convertir 1 para un número 4/4.

$$\frac{5}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$$

b) Sustituimos los valores de a y b en la expresión.

$$\left(\frac{3+2}{1+4}-1\right)+1$$

Esta expresión se ha anidado entre paréntesis (recordar el efecto de la barra de fracción en el numerador y el denominador). El símbolo de agrupamiento más interno es proporcionado por la barra de fracción. Evaluamos el numerador (3 + 2) y denominador (1 + 4) en primer lugar.

$$\left(\frac{5}{5}-1\right)+1$$

$$(1\text{-}1)+1=1$$

c) Sustituimos los valores de w, x, y, z en la expresión.

Esta expresión compleja tiene varias capas de paréntesis anidados. Un método para asegurar que empezamos con los paréntesis más interiores es hacer uso de los otros tipos de soportes. Podemos reescribir esta expresión, poniendo paréntesis a la barra de fracción. Los soportes exteriores los dejaremos como paréntesis (). A continuación serán los brackets, escritos como []. El tercer nivel de paréntesis anidados será el {}. Dejaremos los números negativos entre paréntesis.

$$2\left(\frac{11+[3-2(-2)]}{(1+2)^2}-1\right)$$

$$=2\left(\frac{11+[3+4]}{(1+2)^2}-1\right)$$

$$2\left(\frac{11+7}{(3)^2}-1\right)$$

$$=2\left(\frac{18}{9}-1\right)$$

$$= 2(2-1)$$
$$= 2$$

Evaluación de expresiones con la aplicación Mathematica 8

Mathematica es una herramienta muy útil para evaluar expresiones algebraicas. Mathematica sigue PEMDAS. En esta sección vamos a explicar dos formas de evaluar expresiones con Mathematica.

http://www.wolframalpha.com

Método 1: primero sustituya las variables. Luego evalúe la expresión numérica con Mathematica.

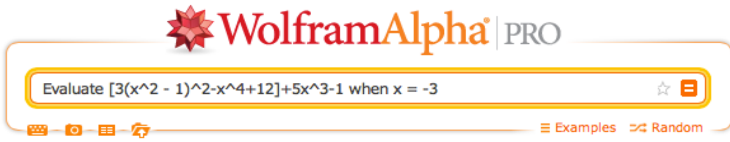
Ejemplo 6

Evalúe $(3(x^2 - 1)^2 - x^4 + 12) + 5x^3 - 1$ con x=-3.

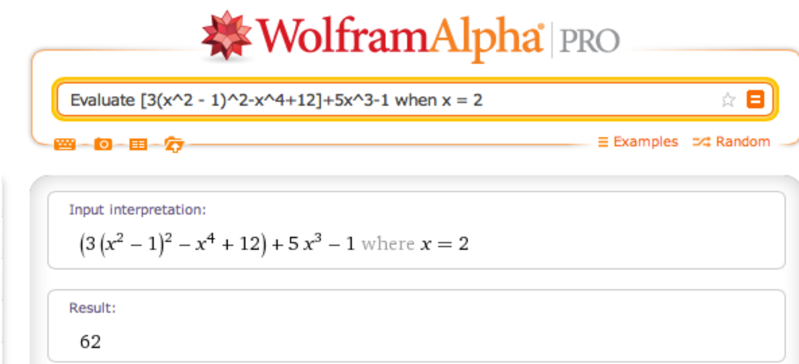
Escriba lo siguiente como ***input*** en Mathematica. Usted puede hacer esto al iniciar una nueva célula en Mathematica, que por defecto es un estilo de celda de entrada. Después, simplemente escriba la siguiente línea como usted tendría que escribir en una calculadora gráfica. Cuando haya terminado, haga clic dentro de la celda y pulse SHIFT + ENTER para evaluar la entrada.

[3((-3)^2-1) ^2-(-3) ^4 + 12] + 5(-3) ^3 – 1 evaluado en x=-3

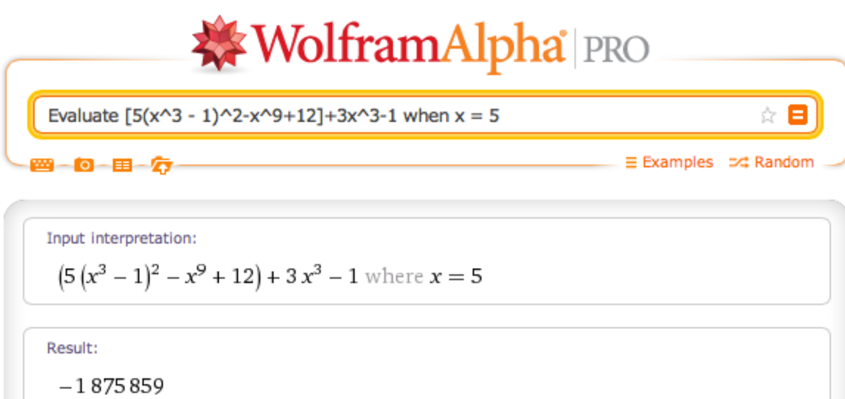
Método 2: ingrese la proposición Evaluate when



Evalúe $(3(x^2 - 1)^2 - x^4 + 12) + 5x^3 - 1$ con x=2.



Evalúe [5(x^3 - 1)^2-x^9+12]+3x^3-1 con x=5.



Ejercicios 7

A) Utilice el orden de las operaciones para evaluar las expresiones siguientes:

1) $8-(7(2+5)-9)$

2) $2+7\times 11-12\div 4$

3) $(3+7)\div(7-12)$

4) $(2(3+(2-1)))/(4-(6+2))-(3-5)$

B) Evalúe las siguientes expresiones con variables.

5) (j k)/(j + k) con j=6 y k=12

6) 2(y^2) con y=5

7) 3x2+2x+1 con x=5

8) (y^2-x)^2 con x=2 y y=1

C) Evalúe las siguientes expresiones con variables.

9) (4x)/(9x^2- 3x + 1) con x=2

10) z^2/(x + y) +x^2/(x - y) con x=1, y=-2, y z=4

11) (4x y z)/(y^2 - x^2) con x=3, y=2, y z=5

12) (x^2- z^2)/(x z - 2x(z - x)) con x=-1,y z=3

D) Inserte paréntesis en cada expresión para que sea cierto.

13) $5-2*6-5+2=5$

14) $12\div 4+10-3*3+7=11$

15) $2^2-3^2-5*3-6=30$

16) $12-8-4*5=-16$

Nota: en mathematica el símbolo * equivale a la multiplicación.

Evaluación de expresiones con la aplicación MathematicaAlpha

17) $x^2 + 2x - x\,y$ con $x = 250$ y $y = -120$

18) $(x\,y - y^4)^2$ con $x = 0.02$ y $y = -0.025$

19) $(x + y - z)/(x\,y + y\,z + x\,z)$ con $x=1/2$, $y=3/2$, y $z=-1$

20) $(x + y)^2/(4x^2 - y^2)$ con $x=3$ y $y=-5$

Resultados:

1) -32
2) 76
3) -2
4) 0
5) 4
6) 50
7) 86
8) 1
9) 8/31
10) -47/3
11) -24
12) -8/5
13) (5-2)x(6-5)+2=5
14) (12/4) + 10 - (3x3) + 7 = 11
15) $\left(2^2 - 3^2 - 5\right) * \left(3 - 6\right) = 30$
16) 12-(8-4)*5=-16
17) 93000
18) 0.000000250391
19) -12/5

20) -4/11

Lección 12: Patrones y ecuaciones

En las matemáticas, y especialmente en álgebra, buscamos patrones en los números que vemos. Las herramientas del álgebra nos ayudan en la descripción de estos patrones con palabras y con ecuaciones (fórmulas o funciones). Una ecuación es una fórmula matemática que da el valor de una variable en términos de otra.

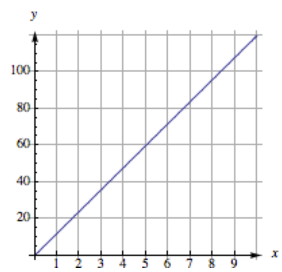
Por ejemplo, si un parque temático cobra de admisión $12, entonces el número de personas que ingresan al parque todos los días y la cantidad de dinero tomada por las taquillas están relacionadas matemáticamente. Podemos escribir una regla para encontrar la cantidad de dinero tomada por la taquilla.

Podríamos decir: "El dinero tomado en pesos es (igual a) doce veces el número de personas que entran en el parque". También podríamos hacer una tabla. La siguiente tabla relaciona el número de personas que visitan el parque y el total de dinero tomado por la taquilla.

Número de visitantes	1	2	3	4	5	6	7
Costo $	12	24	36	48	60	72	84

Está claro que vamos a necesitar una gran tabla, si vamos a ser capaces de hacer frente a un día de trabajo en medio de unas vacaciones de escuela.

Una tercera forma en que podríamos relacionar las dos cantidades (visitantes y dinero) es con un gráfico. Si graficamos el dinero tomado en el eje vertical y el número de visitantes en el eje horizontal, entonces tendríamos un gráfico que se ve como el que se muestra a continuación. Tenga en cuenta que este gráfico muestra una línea suave para valores no enteros de números de x (por ejemplo, $x= 2.5$). Pero en la vida real esto no sería posible porque no se puede tener la mitad de una persona que entra en el parque. Este es un tema de dominio y rango, algo de lo que hablaremos en el texto sobre funciones.



El método que se examinará en detalle en esta lección está más cerca de la primera manera que elegimos para describir la relación. En otras palabras "el dinero tomado en pesos es de doce veces el número de personas que ingresan al parque". En términos matemáticos, podemos describir este tipo de relación con variables. Una **variable** es una letra usada para representar una cantidad desconocida. Podemos ver el comienzo de una fórmula matemática en las palabras.

El dinero tomado en pesos es doce veces el número de personas que entran en el parque.

Esto se puede traducir a:

el dinero tomado en pesos = 12x (el número de personas que ingresan al parque)

Para hacer más visibles las cantidades han sido colocadas entre paréntesis. Ahora podemos ver que las cantidades pueden ser asignadas a la carta. En primer lugar, hay que decir qué letras (o variables) se relacionan con las cantidades.

A esto le llamamos la definición de las variables:

- Sea **x** = el número de personas que entran al parque temático.
- Sea **y** = la cantidad total de dinero recaudado en la taquilla.

Ahora podemos mostrar la cuarta forma de describir la relación con nuestra ecuación algebraica.

$$y=12x$$

Escribir una ecuación matemática que utiliza variables es muy conveniente. Usted puede realizar todas las operaciones necesarias para resolver este problema sin tener que escribir las cantidades conocidas y desconocidas una y otra vez. En el extremo del problema, solo tenemos que recordar qué representan las variables **x,y**.

Escribir ecuaciones

Una ecuación es un término utilizado para describir un conjunto de números y variables relacionadas a través de operadores matemáticos. Una ecuación algebraica contendrá variables que se refieren a las cantidades reales o números que representan valores para cantidades reales. Si por ejemplo, se quiere utilizar la ecuación algebraica en el ejemplo anterior para encontrar el dinero necesario para un determinado número de visitantes, que podría sustituir ese valor de **x** en **y**, luego resolver la ecuación resultante para **y**.

Ejercicios 3.1:

Un parque temático cobra $12 de entrada a los visitantes. Encontrar el dinero obtenido sí 1296 personas visitan el parque.

Vamos a romper la solución a este problema en una secuencia de pasos. Esto nos ayudará a resolver todos los problemas en esta lección.

Paso 1: Extraer la información importante.

(dinero tomado en pesos) = 12x (número de visitantes)

(número de visitantes) = 1296

Paso 2: Traducir en una ecuación matemática.

Hacemos esto mediante la definición de las variables y sustituyendo los valores conocidos.

Sea y= (dinero tomado en pesos)

y = 12 x 1296 ESTA ES NUESTRA ECUACIÓN

Paso 3: Resolver la ecuación.

y= 15552 Respuesta: El dinero es $15,552.

Paso 4: Comprobar el resultado.

Si $15,552 se toma en la taquilla y los boletos son de $12, entonces podemos dividir la cantidad total de dinero recogida por el precio por entrada individual.

$$\textit{número de personas} = \frac{15552}{12} = 1296$$

Nuestra respuesta es igual al número de personas que ingresaron al parque. Por lo tanto, la respuesta concuerda.

Ejercicios 3.2:

La siguiente tabla muestra la relación entre dos cantidades. Primero, escribe una ecuación que describa la relación. Luego, averigua el valor de **b** cuando **a** es 750.

a	0	10	20	30	40	50
b	20	40	60	80	100	120

Paso 1: Extraer la información importante.

Podemos ver en la tabla que cada vez que **a** tiene un aumento de 10, **b** aumenta en 20. Sin embargo, **b** no es simplemente dos veces el valor de **a**. Podemos ver que cuando a= 0, b = 20, así que esto da una idea de lo que norma el patrón siguiente. Esperamos que usted pueda ver la regla que une **a** con **b**.

Paso 2: Traducir en una ecuación matemática.

Texto	Traslación	Expresión matemática
Para encontrar **b**		b=
El doble valor de **a**		2a
Añadir **20**		+20

La ecuación es:

$$b = 2a + 20$$

Paso 3: Resolver la ecuación.

Ir de nuevo al problema original. Sustituimos los valores que tenemos para nuestra variable conocidos y volver a escribir la ecuación.

"cuando es *750*" $\rightarrow 0 = 2(750) + 20$

$$b = 2(750) + 20$$
$$b = 1500 + 20 = 1520$$

Paso 4: Comprobar el resultado.

En algunos casos se puede comprobar el resultado al volver a colocarlo en la ecuación original. Otras veces simplemente hay que verificar su matemática. Doble control es siempre recomendable. En este caso, podemos conectar nuestra respuesta por **b** en la ecuación junto con el valor de esta y ver qué sale.

$1520 = 2\ (750) + 20$ es verdad porque ambos lados de la ecuación son iguales o sea, equilibrada. Una verdadera declaración significa que la respuesta es correcta.

Lección 13: Ecuaciones y desigualdades

En álgebra, una ecuación es una expresión matemática que contiene un signo igual. Nos dice que dos expresiones representan el mismo valor. Por ejemplo, $y=12x$ es una ecuación. Una desigualdad es una expresión matemática que contiene signos de desigualdad. Por ejemplo, $y \leq 12x$ es una desigualdad. Las desigualdades nos dicen que una expresión es más grande o más pequeña que otra expresión. Ecuaciones y desigualdades pueden contener variables y constantes.

- Las variables se dan generalmente con una letra y se utilizan para representar valores desconocidos. Estas cantidades pueden cambiar porque dependen de otros números en el problema.
- Las constantes son cantidades que se mantienen sin cambios.

Ecuaciones y desigualdades se utilizan como notación abreviada para situaciones que involucran datos numéricos. Son muy útiles porque la mayoría de los problemas requieren varios pasos para llegar a una solución, y se vuelve tedioso escribir repetidamente la situación en palabras.

Escribir ecuaciones y desigualdades

Estos son algunos ejemplos de ecuaciones:

$a)\ 4x-8=6$

$b)\ x+9=3x+5$

$c)\ \frac{x}{3}+2=11$

$d)\ x^3+1=11$

Para escribir una desigualdad, se utilizan los siguientes símbolos:

$>$ mayor que
$\geq$ mayor que o igual a

$<$ menor que
$\leq$ menor que o igual a

$\neq$ no es igual a, o distinto de

Estos son algunos ejemplos de las desigualdades.

$a)\ 8x < 5$

$b)\ 5 - x \leq 6x$

$c)\ x^2 + 2x - 1 > 0$

$d)\ \dfrac{8x}{3} \geq \dfrac{x}{5} - 3$

La habilidad más importante en el álgebra es la capacidad de traducir un problema planteado en la ecuación o desigualdad correcta para que pueda encontrarse la solución fácilmente. Pasar de un problema de palabras para la solución, pasa por varias etapas. Dos de los pasos iniciales definen las variables y la traducción de la palabra problema en una ecuación matemática.

Definición de las variables significa asignar letras a las cantidades desconocidas en el problema.

Traducir significa pasar la expresión verbal en una expresión matemática que contiene variables y operaciones matemáticas con un signo igual o un signo de desigualdad.

Ejercicio 1

Definir las variables y traducir las siguientes expresiones en ecuaciones:

a) Un número más 12 es 20.

b) 9 menos, de dos veces un número, es 33.

c) Cinco más de, 4 veces un número, es 21.

d) $ 20 eran una cuarta parte del dinero que se gasta en la pizza.

Solución:

a) **Define**

Sea n = el número que estamos buscando.

Traduce

n+12=20

La ecuación es: n+12=20

b) **Define**

Sea n = el número que estamos buscando.

Traduce

9 menos, de dos veces un número, es 33.

Esto significa que dos veces un número menos 9 es 33.

$2 \times n - 9 = 33$

La ecuación es: $2 \times n - 9 = 33$

c) **Define**

Sea n = el número que estamos buscando.

Traduce

Cinco más de, 4 veces un número, es 21.

Esto significa que 4 veces un número más 5 es 21.

$4 \times n + 5 = 21$

La ecuación es: $4 \times n + 5 = 21$

d) **Define**

Sea m el dinero gastado en la pizza.

Traduce

$ 20 eran una cuarta parte del dinero que se gasta en la pizza.

$$20 = \frac{1}{4} \times m$$

La ecuación es: $20 = \frac{1}{4} \times m$

A menudo, los problemas en términos de palabras es necesario reformularlos antes de poder escribir una ecuación.

Ejercicio 2

Encontrar la solución a los problemas siguientes:

a) Juanito trabajó durante dos horas y embaló 24 cajas. ¿Cuánto tiempo gastó en una caja de embalaje?

b) Después de un descuento del 20%, un libro cuesta $ 12. ¿Cuánto costaba el libro antes del descuento?

Solución:

a) Definición

Sea t = tiempo, t necesario para empacar una caja

Traducción

Juanito trabajó durante dos horas y embaló 24 cajas.

Esto significa que dos horas es 24 veces el tiempo que se necesita para empacar.

$$2 = 24 \times t$$

Solución:

$$t = \frac{2}{24} \ es \ t = \frac{1}{12} hrs. \ o \ \ t = \frac{1}{12} \times 60 \min$$

Solución:

Juanito tarda 5 minutos para empacar una caja.

b) **Definición**

Sea p = precio del libro antes del descuento.

Traducción

Después de un descuento del 20%, un libro cuesta $ 12.

Esto significa que el precio -20% de precio es de $ 12.

Solución:

$$0.8p = 12 \ \ es \ \ p = \frac{12}{0.8} \ \ y \ \ p = 15$$

Comprobación

20% de descuento: 0.20 $ 15 = $ 3

Precio con descuento: $ 15 - $ 3 = $ 12

La respuesta correcta.

Ejercicio 3

Definir las variables y traducir las siguientes expresiones en desigualdades.

a) La suma de 5 y un número es menor o igual a 2.

b) La distancia desde Cerano a Morelia está a menos de 150 km.

c) Rogelio necesita ganar más de 82 puntos en su examen para recibir una B en su clase de álgebra.

d) Un niño tiene que ser de 42 pulgadas o más para subir a la montaña rusa.

a) **Definición**

Sea n = el número que estamos buscando.

Traducción

$5 + n \leq 2$

b) **Definición**

Sea d = la distancia desde Cerano a Morelia en Km.

Traducción

$d < 150$

c) **Definición**

Sea = Rogelio aprueba con B.

Traducción

$x > 82$

d) **Definición**

Sea h = la altura del niño en pulgadas.

Traducción

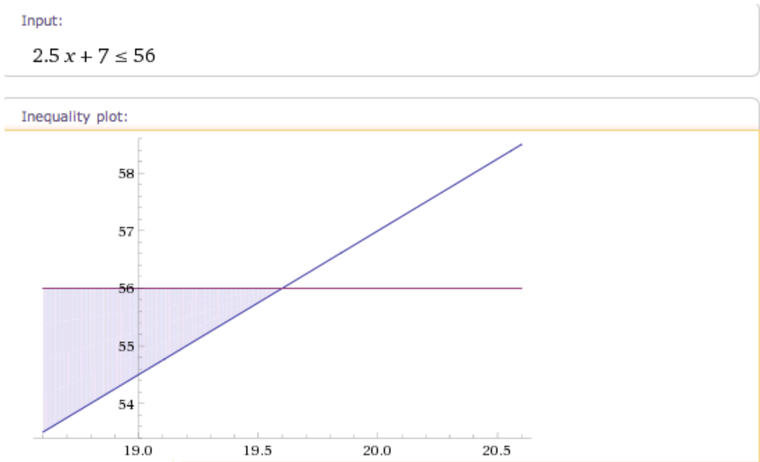
$h \geq 42$

Desigualdades gráficas

Ejemplo:

$2.5x + 7 \leq 56$

$x \leq \frac{98}{5}$



http://demonstrations.wolfram.com/GraphingSystemsOfInequalities/

Compruebe las soluciones de las ecuaciones

A menudo, tendrá que comprobar las soluciones de las ecuaciones con el fin de comprobar su trabajo. En una clase de matemáticas, la comprobación de que usted llegó a la solución correcta es buena práctica. Comprobamos la solución de una ecuación mediante la sustitución de la variable en una ecuación con el valor de la solución. Una solución debería resultar en una declaración verdadera cuando se evalúa en la ecuación.

Con ayuda de Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com) evaluaremos algunas ecuaciones.

Ejercicio 4

Compruebe que x = 1 es la solución a la ecuación 4x + 1 =-2x + 7.

$$4(1)+1=-2(1)+7$$
$$4+1=-2+7$$
$$5=5$$

Esta es una declaración verdadera.

Esto significa que x = 1 es la solución de la ecuación 4x + 1 =-2x + 7.

Ejercicio 5

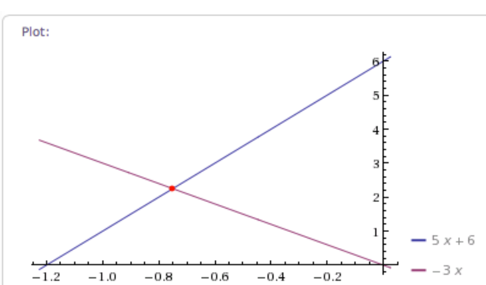
Comprobar que el número dado es una solución de la ecuación correspondiente.

$$
\begin{aligned}
&a)\ \ x=-\frac{3}{4};\ \ 5x+6=-3x\\
&b)\ \ y=2, y=-4;\ \ y^2+2y=8\\
&c)\ t=4;\ \ 5t+3=t
\end{aligned}
$$

Solución:

Sustituya la variable en cada ecuación con el valor dado.

a)
$$
\begin{aligned}
&5(-\frac{3}{4})+6=-3(\frac{3}{4})\\
&-\frac{15}{4}+6=-\frac{9}{4}\\
&-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$



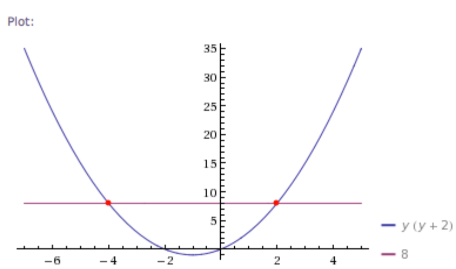
Esta es una declaración verdadera. Esto significa que x = -3/4 es una solución a 5x + 6 =-3x.

b)

$$y^2 + 2y = 8$$
$$y^2 = 8 - 2y$$
$$y = \pm\sqrt{8 - 2y}$$
$$2 = \sqrt{(8 - 4)}$$
$$2 = 2$$

y=2 es solución para $y^2 + 2y = 8$

$$y^2 + 2y = 8$$
$$y^2 = 8 - 2y$$
$$y = \pm\sqrt{8 - 2y}$$
$$-4 = \pm\sqrt{(8 + 8)}$$
$$-4 = -4$$

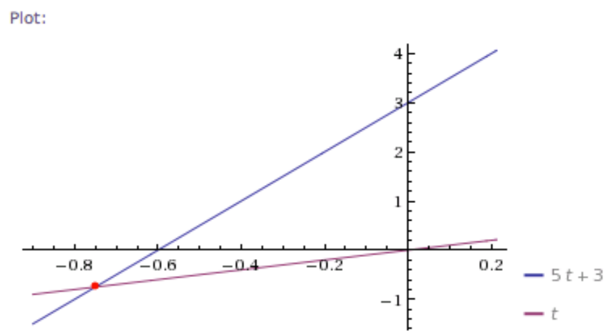


y=-4 es solución para $y^2 + 2y = 8$.

Esta es una declaración verdadera. Esto significa que $y = 2, y = -4;$ son soluciones de $y^2 + 2y = 8$.

c)

$$5(4)+3=4$$
$$20+3=4$$
$$23\neq 4$$



Esto no es una declaración verdadera. Esto significa que t= 4 no es una solución para $5t+3=t$

Compruebe soluciones para las desigualdades

Ejercicio 6

Para comprobar la solución de una desigualdad, se sustituye la variable en la desigualdad por el valor de la solución. Una solución para una desigualdad produce una declaración verdadera cuando es sustituida en la desigualdad.

Compruebe que el número dado es una solución de la desigualdad correspondiente.

$a)\quad a=8;\quad 30a\leq 280$

$b)\quad b=-3;\quad \dfrac{4-b}{b}>-5$

$c)\quad x=\dfrac{3}{5};\quad 2x+3\leq 9$

$d)\quad x=29;\quad \dfrac{x}{7}+6\leq x-18$

Soluciones

a) Remplazamos las variables en la inecuación con el valor

$$30(8) \leq 280$$
$$240 \leq 280$$

a=8 es una solución para $30a \leq 280$

$$\frac{4-(-3)}{(-3)} > -5$$
$$\frac{7}{(-3)} > -5$$

b) $-\frac{7}{3} > -5$

b=-3 es una solución para $\frac{4-b}{b} > -5$

$$2(\frac{3}{5}) + 3 \leq 9$$
$$\frac{6}{5} + 3 \leq 9$$
$$\frac{6}{5} + \frac{15}{5} \leq 9$$

c) $\frac{21}{5} \leq 9$

x=(3/5) es una solución para $2x + 3 \leq 9$

$$\frac{29}{7} + 6 \leq 29 - 18$$
$$\frac{29}{7} + \frac{42}{7} \leq 29 - 18$$

d) $\frac{71}{7} \leq 11$

x=29, no es solución para $\frac{x}{7} + 6 \leq x - 18$ puesto que no cumple con la inecuación o llamada desigualdad algebraica.

Lección 14: Funciones como relaciones y tablas

Una función es una regla para relacionar dos o más variables. Por ejemplo, el precio que paga por el servicio telefónico celular puede depender de la cantidad de minutos que habla por teléfono. Diríamos que el costo del servicio telefónico es una función de la cantidad de minutos que habla. Considere la siguiente situación:

Júpiter asiste a un zoológico donde paga \$2 por visita.

Existe una relación entre el número de visitas en el que Júpiter va y el costo total por el día. Para calcular el costo se multiplica el número de paseos por dos. Una función es la regla que nos lleva desde el número de paseos al costo. Las funciones son por lo general, pero no siempre, las reglas basadas en operaciones matemáticas. Usted puede pensar en una función como una caja o una máquina que contiene una operación matemática.

Número de visitas $\rightarrow x2 \rightarrow \text{costo}$

Un conjunto de números alimenta la caja de función. Esos números son cambiados por la operación dada en un conjunto de números que van saliendo desde el lado opuesto de la caja. Podemos introducir valores diferentes para el número de visitas y obtener el costo.

$$0,1,2,3,4 \rightarrow \times 2 \rightarrow 0,2,4,6,8$$

La entrada se llama variable independiente, porque su valor puede ser cualquier número posible. Los resultados de salida de la operación **y**, se llama variable dependiente porque su valor depende del valor de entrada.

A menudo, las funciones son más complicadas que el de este ejemplo. Las funciones por lo general contienen más de una operación matemática. Aquí hay una situación que es un poco más complicada.

Júpiter va a un zoológico donde paga \$8 para la admisión y \$2 por transporte.

Esta función representa la cantidad total que paga Júpiter. La regla para la función es "multiplicar el número de visitas por 2 y añadir 8".

$$\textit{número de visitas} \rightarrow \times 2 \rightarrow +8 \rightarrow \text{costo}$$

Los diferentes valores de entrada para el número de visitas, genera diferentes salidas de gastos.

$$0,1,2,3,4 \rightarrow \times 2 \rightarrow 0,2,4,6,8 \rightarrow +8 = \text{costo}$$

Estos diagramas de flujo son útiles en la visualización de lo que es una función. Sin embargo, son difíciles de utilizar en la práctica. Nosotros usamos la siguiente notación abreviada en su lugar.

f(x)	y
Caja de función	Salida

Así que "**x**" representa la entrada y "**y**" representa la salida. La notación f(x) representa la función o las operaciones matemáticas que usamos en la entrada para obtener la salida. En el último ejemplo, el costo es de 2 veces el número de visitas más 8. Puede escribirse como una función.

$$f(x) = 2x + 8$$

La salida está dada por la fórmula. La notación **y** y $f(x) = 2x + 8$ se utilizan indistintamente, pero tenga en cuenta que representa el valor de producción y f(x) representa las operaciones matemáticas que nos llevan desde la entrada hasta la salida del algoritmo matemático.

Identificar el dominio y el rango de una función.

En el último ejemplo, vimos que podemos introducir el número de visitas en la función que nos dé el costo total para ir al zoológico. El conjunto de todos los valores que son posibles para la entrada se denomina el **dominio de la función**. El conjunto de todos los valores que son posibles para la salida se denomina el **rango de la función o contradominio**. En muchas situaciones, el dominio y el rango de una función es conjunto de todos los números reales, pero este no es siempre el caso. Echemos un vistazo a nuestro ejemplo del parque de atracciones.

En el ejemplo anterior, en esta función, **x** es el número de visitas y **y** es el costo total. Para encontrar el dominio de la función, es necesario determinar qué valores tienen sentido en la entrada.

- Los valores tienen que ser cero o positivo, porque Júpiter no puede ir en un número negativo de visitas.
- Los valores deben ser enteros, ya que, por ejemplo, Júpiter no podría ir en 2.25 veces.
- Siendo realistas, debe haber un número máximo de visitas que Júpiter puede continuar debido a que el zoológico cierra, se queda sin dinero, etc. Sin embargo, como no se nos da ninguna información sobre esto, debemos tener en cuenta que todos los enteros no negativos podrían ser posibles, independientemente de lo grande que sean.

Encontrar el dominio y el rango de las siguientes funciones:
Una pelota se deja caer desde una altura y rebota hasta el 75% de su altura original.
Definimos variables
x = altura original
y = altura que rebota

Aquí es una función que describe la situación. $y = f(x) = 0.75x$
La variable puede tomar cualquier valor real mayor que cero.

Por lo tanto:
El **dominio** es el conjunto de todos los números reales mayores que cero.
El **rango** es el conjunto de todos los números reales mayores que cero.
Como hemos visto, para una función, la variable **x** se llama variable independiente, ya que puede ser cualquiera de los valores del dominio, y la variable **y** se llama variable dependiente, ya que su valor depende de **x**. Los símbolos pueden ser utilizados para representar las variables dependientes e independientes.

Una función:

- Solo acepta números del dominio.
- Para cada entrada, no es exactamente una salida. Todas las salidas forman el rango.

Tablas y función

Una tabla es una manera muy útil de organizar los datos representados por una función. Podemos coincidir con los valores de entrada y salida y organizarlos en forma de tabla. Tomemos como ejemplo de las visitas a zoológico. $f(x) = 2x + 8$

Valor x	Valor y
0	8
1	10
2	12
3	14
4	16
5	18

Una tabla nos permite organizar los datos de manera compacta. También proporciona una referencia fácil para la búsqueda de datos, y nos da un conjunto de puntos de coordenadas que podemos trazar para crear una representación gráfica de la función.

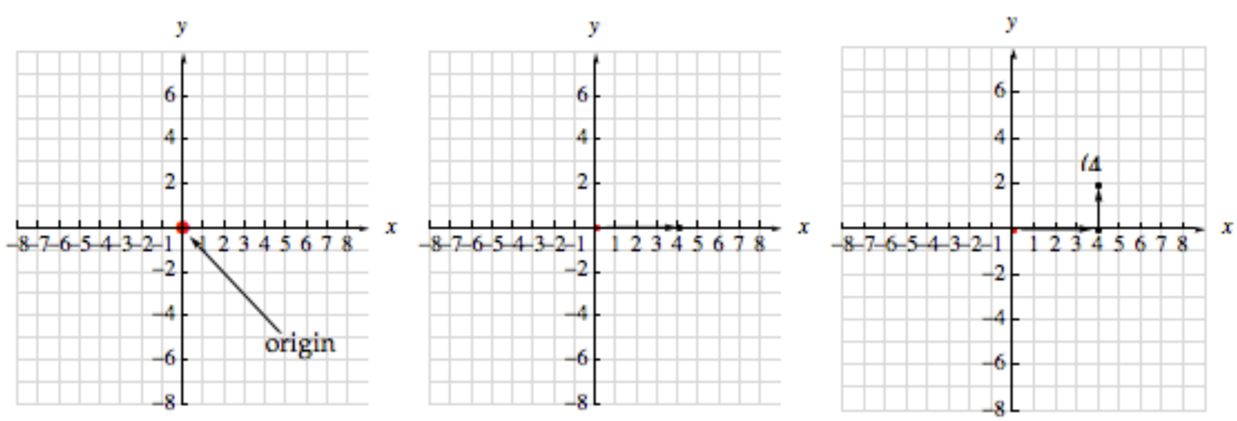
Para generar una tabla en wólfram Alpha se ingresa la Instrucción Table[x^2,{x,2,5,(1/2)}]
Donde x^2 es la f(x), x es la variable independiente, desde 2 a 5, con pasos de ½.

Lección 15: Funciones y gráficas

Representamos funciones gráficamente por puntos en un plano de coordenadas trazado (también llamado, plano cartesiano). El plano de coordenadas es una red formada por un número de líneas, un línea horizontal y una recta numérica vertical, que se cruzan en un punto llamado origen. El origen es el punto (0, 0) y es el lugar "de partida". Con el fin de trazar los puntos de la cuadrícula, se le indica el número de unidades que debe ir a la derecha o a la izquierda y el número de unidades que debe ir hacia arriba o hacia abajo desde el origen. La línea horizontal se llama eje **X** y la línea vertical se llama eje **Y**. Las flechas en el extremo de cada eje indica que continúa más allá del final del dibujo.

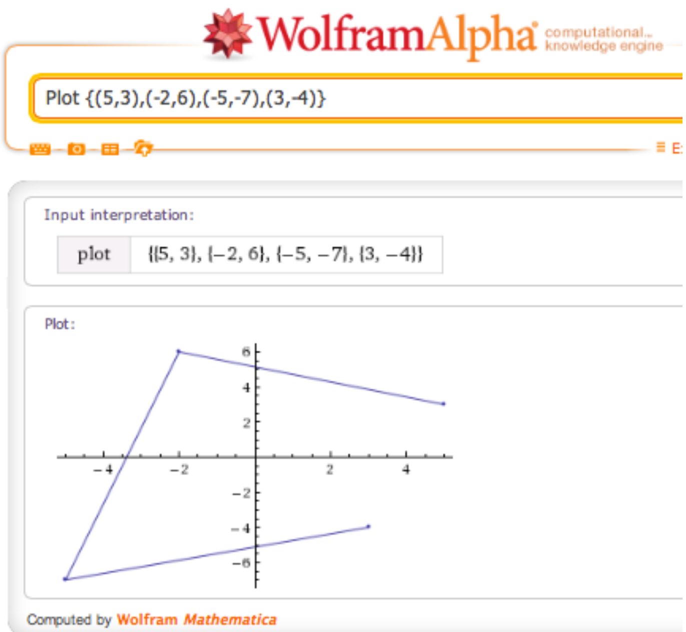
A partir de una función, podemos recopilar información en términos de pares de puntos. Para cada valor de la variable independiente en el dominio, la función se utiliza para calcular el valor de la variable dependiente. Llamamos a estos pares de puntos de coordenadas puntos o valores**,** y se escriben como (x, y).

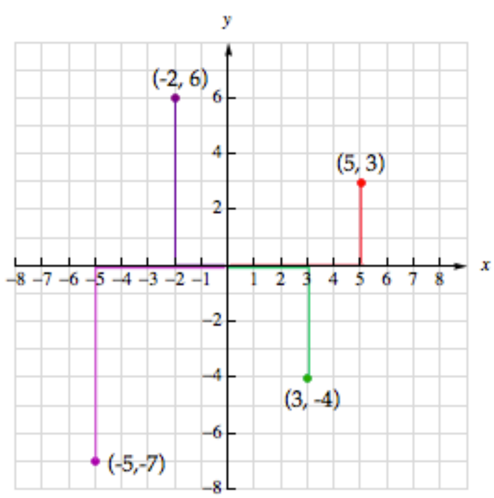
Para graficar un punto de coordenadas como (4, 2), se inicia en el origen. Después nos trasladamos 4 unidades a la derecha. Luego pasamos 2 unidades hacia arriba desde la última posición.



Gráfica los siguientes puntos de coordenadas en el plano cartesiano:

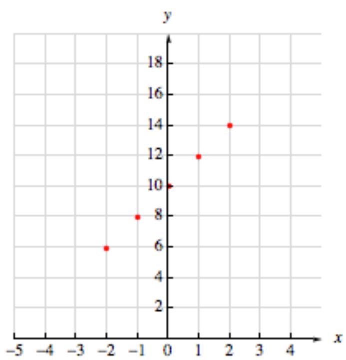
a) P(5,3)
b) P(-2,6)
c) P(-5,-7)
d) P(3,-4)

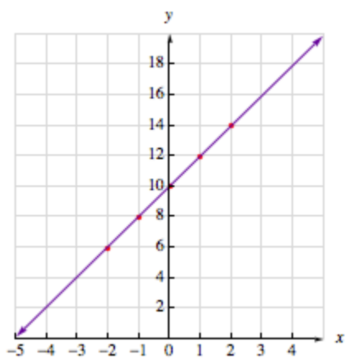




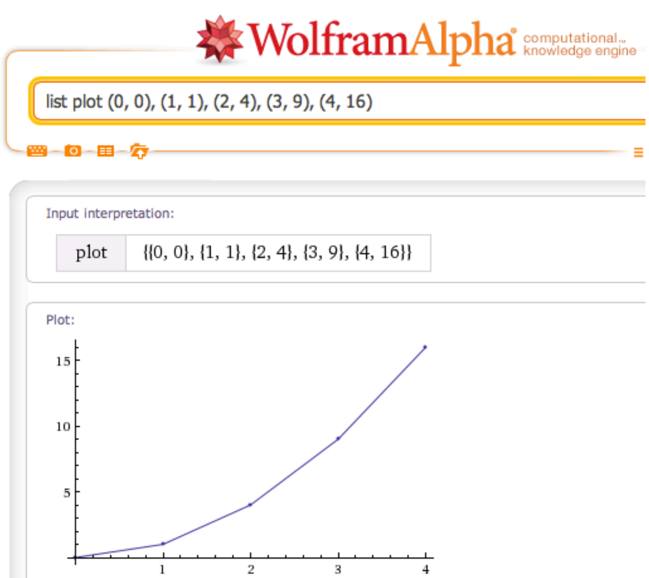
El eje **X** y el eje **Y** dividen el plano de coordenadas en cuatro cuadrantes. Los cuadrantes están numerados a la izquierda a partir de la parte superior derecha. El punto marcado para (a) está en el primer cuadrante, (b) está en el segundo cuadrante, (d) se encuentra en el cuarto cuadrante, y (c) se encuentra en el tercer cuadrante.

Si una tabla nos da un conjunto de puntos de coordenadas (-2, 6), (-1, 8), (0, 10), (1, 12), (2, 14).

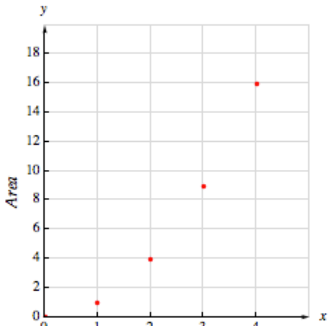


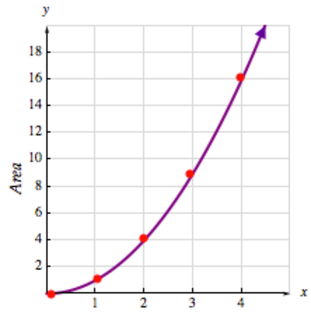


Graficando con ayuda de Wolfram Alpha, list plot (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)



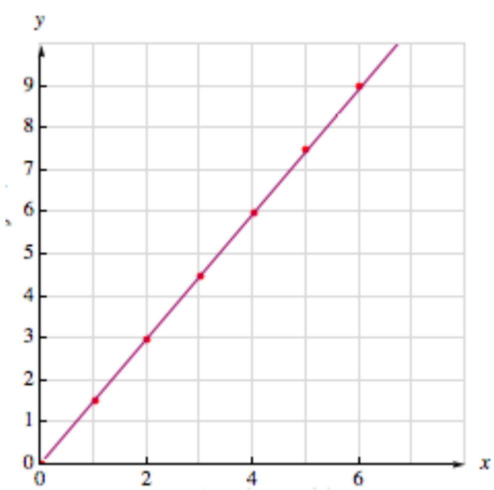
Para graficar la función, trazamos todos los puntos de las coordenadas. Ya que no se nos dice el dominio de la función, podemos suponer que el dominio es el conjunto de todos los números reales no negativos. Para demostrar que la función es válida para todos los valores en el dominio, conectamos los puntos con una curva suave. La curva no tiene sentido para los valores negativos de la variable independiente, por lo que se detiene en x = 0, pero continúa hasta el infinito en la dirección positiva.





A veces, usted tendrá que encontrar la ecuación o la regla de la función observando la gráfica de la función. A partir de un gráfico, puede leer los pares de puntos de coordenadas que se encuentran en la curva de la función. Los puntos de coordenadas dan los valores de las variables dependientes e independientes que se relacionan entre sí por la regla. Sin embargo, debemos asegurarnos de que esta regla funciona para todos los puntos de la curva. En este curso usted aprenderá a reconocer los diferentes tipos de funciones. En el objeto de estadística descriptiva, habrá métodos estadísticos específicos llamados de regresión o ajuste a curvas, que se pueden utilizar para encontrar la función de los puntos al encontrar la regla de la función.

Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra la distancia que cubre un chapulín en el tiempo. Encuentre la regla de función que muestra cómo la distancia y el tiempo están relacionados entre sí.



Solución. Hacemos la tabla de valores de varios puntos de coordenadas, para ver si podemos observar un patrón de cómo se relacionan entre sí.

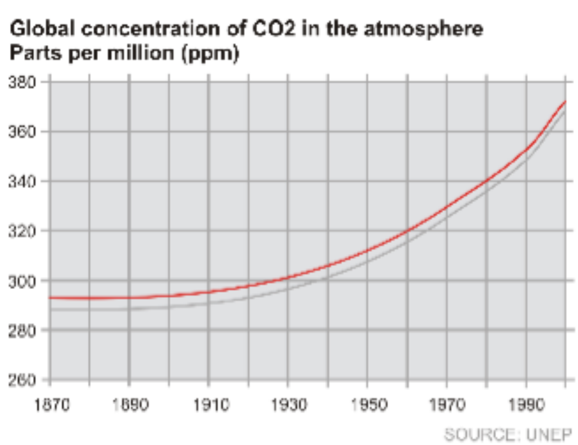
Tiempo	0	1	2	3	4	5	6
Distancia	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9

Podemos ver que por cada segundo, la distancia se incrementa en 1.5 metros. Podemos escribir la regla de la función como:

Distancia = 1.5 x tiempo

La ecuación es $f(x)=1.5x$

Analiza la gráfica de una situación del mundo real. Los gráficos se utilizan para representar datos en todos los ámbitos de la vida. Usted puede encontrar los gráficos en los periódicos, campañas políticas, revistas científicas y presentaciones de negocios. He aquí un ejemplo de un gráfico que puede verse publicado en la prensa. Los científicos creen que el aumento de las emisiones de efecto invernadero en los cascos polares, en particular de dióxido de carbono, están contribuyendo al calentamiento del planeta. Este gráfico muestra cómo los niveles de dióxido de carbono han aumentado a medida que el mundo se ha industrializado.



En este gráfico, podemos encontrar la concentración de dióxido de carbono que se encuentra en la atmósfera en diferentes años.

1900	285 partes por millón
1930	300 partes por millón
1950	310 partes por millón
1990	350 partes por millón

Podemos encontrar reglas de funciones haciendo aproximaciones. Para estos tipos de gráficos se utilizan métodos que se aprenden en las clases de matemáticas avanzadas. La función f(x)= 0.0066x ^ 2 - 24.9x + 23.765 aproxima esta gráfica muy bien.

Determinar si una relación es una función

Usted vio que una función es una relación entre las variables independientes y las variables dependientes. Es una regla que utiliza los valores de la variable independiente para dar los valores a la variable dependiente. Una regla de función se puede expresar en palabras, como una ecuación, como una tabla de valores, y como un gráfico. Todas las representaciones son útiles y necesarias en la comprensión de la relación entre las variables. Matemáticamente, una función es un tipo especial de relación.

En una función, para cada entrada no es exactamente una salida. Esto generalmente significa que cada valor de **x** tiene un solo valor **y** asignado. Sin embargo, no todas las funciones implican **"x"** y **"y "** .

Tenga en cuenta la relación que muestra las alturas de todos los estudiantes en una clase. El dominio es el conjunto de personas en la clase y el rango es el conjunto de alturas. Cada persona en la clase no puede tener más de una altura al mismo tiempo. Esta relación es una función porque para cada persona hay exactamente una altura que pertenece a él o ella.

Observe que en una función, un valor en el rango puede pertenecer a más de un elemento en el dominio, por lo que más de una persona en la clase puede tener la misma altura. Lo contrario no es posible, una persona no puede tener varias alturas.

Lección 16: Ruta de resolución de problemas

Siempre pensamos en las matemáticas como la materia clase en la escuela, donde resolvemos muchos problemas. A lo largo de su experiencia con las matemáticas, ha resuelto muchos problemas y sin duda se encontrará con muchos más. La resolución de problemas es necesaria en todos los aspectos de la vida. La compra de una casa, alquilar un coche y averiguar cuál es la mejor venta, son solo algunos ejemplos donde la gente utiliza las técnicas de resolución de problemas. En este texto, exponemos un plan sistemático para resolver problemas del mundo real y enfoques para la solución de problemas. En esta sección, vamos a presentar un plan de resolución de problemas que serán de utilidad a lo largo de este aprendizaje de las matemáticas.

Leer y comprender una situación, problema dado. El primer paso para resolver un problema dado en palabras, es leer y entender el problema. Aquí hay algunas preguntas que usted debe hacerse.

¿Qué es lo que estoy intentando averiguar?
¿Qué información se me ha puesto a disposición?
¿Alguna vez he resuelto un problema similar?
Este es también un buen momento para definir las variables. Al identificar los datos conocidos y desconocidos, a menudo es útil para asignarles una letra para hacer anotaciones y cálculos más fácil.

El siguiente paso en el plan de resolución de problemas es hacer un plan o desarrollar una estrategia. ¿Cómo puede la información que usted sabe, ayudar a averiguar las incógnitas?
He aquí algunas estrategias comunes que usted aprenderá.

- Dibujar un diagrama

- Hacer tablas
- Buscar patrones
- Realizar pruebas y comprobaciones de patrones posibles
- Trabajar de soluciones hacia atrás
- Emplearemos fórmulas
- Lectura de soluciones y gráficas
- Escribir ecuaciones
- Usar modelos lineales
- Usar análisis dimensional
- Utilizar funciones que se ajusten a la situación

En la mayoría de los problemas, se va a utilizar una combinación de estrategias. Por ejemplo, dibujar un diagrama en busca de patrones, es buena estrategia para la mayoría de los problemas. Además, hacer una tabla y dibujar un gráfico, a menudo se emplean juntos. La estrategia de "escribir una ecuación" es la que va a utilizar con la mayor cantidad en su estudio del álgebra.

Resolver problemas y checar resultados. Una vez que desarrolló un plan, puede implementar y resolver el problema. Eso significa que el uso de tablas o gráficos y la realización de todas las operaciones lo llevan a la respuesta.

El último paso en la solución de cualquier problema, debe ser siempre comprobar e interpretar la respuesta. Aquí hay algunas preguntas para ayudarle a hacerlo.
¿Tiene sentido el resultado?
¿Si conecta la solución de nuevo en el problema, no todos los números funcionan?
¿Se puede utilizar otro método para llegar a la misma respuesta?

A veces, un cierto problema se resuelve mejor mediante el uso de un método específico. La mayoría de las veces, sin embargo, se pueden resolver mediante el uso de diferentes tipos de estrategias. Cuando esté familiarizado con todas las estrategias de resolución de problemas, le corresponde elegir los métodos que sienta más cómodos y que tengan sentido para usted. En este texto, a menudo se utiliza más de un método para resolver un problema. De esta manera, podemos demostrar las fortalezas y debilidades de las diferentes estrategias cuando se aplican a diferentes tipos de problemas.

Independientemente de la estrategia que utilice, siempre se debe aplicar el plan de solución de problemas cuando se están resolviendo problemas matemáticos.

URL'S
http://www.wolframalpha.com
http://mathworld.wolfram.com/Rectangle.html
http://education.wolfram.com/algebra/equations-and-functions/variable-expressions/textbook.html
http://www.wolfram.com/cdf/adopting-cdf/licensing-options.html
http://demonstrations.wolfram.com/TheAreaOfASquareInASquare/
http://www.wolfram.com/cdf-player/
video
http://www.youtube.com/watch?v=YoJRj9VRWd0
http://www.wolfram.com/broadcast/video.php?channel=104&video=1379
http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html
libros
http://www.wolfram.com/learningcenter/tutorialcollection/
http://www.ptable.com
http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=GOMIBdM6N7Q#!
http://www.purposegames.com/game/153
http://www.purposegames.com
http://www.watchknowlearn.org/Video.aspx?VideoID=43932&CategoryID=86
http://www.edmodo.com/
http://www.showme.com

http://edudemic.com/2013/02/free-education-apps-sorted-by-grade-level/

http://www.centerofmath.org/video_ic.html

CDF tutorial

http://reference.wolfram.com/mathematica/howto/CreateAComputableDocumentFormatFile.html

MÚSICA

http://www.wolframalpha.com/input/?i=clarinet&lk=3

Lección 17: Aritmética

Los apartados anteriores se consideran elementales para la currícula básica de las matemáticas en el mundo. Se enseñan a nivel de educación básica en las escuelas. Aunque todos estos aspectos del pensamiento matemático son considerados elementales, no hay un límite claro entre las matemáticas elementales y avanzadas. Podemos rescatar del contexto anterior, conceptos como infinito, abstracción, demostración, objeto matemático, objetividad, existencia y base axiomática en las matemáticas, que son inseparables para comprender matemáticas.

Para casi todo mundo se refiere a la Aritmética como el dominio humilde de la adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros y fracciones. Se comienza con la noción de números naturales en la primaria y se concluye con el entrenamiento de la misma en dispositivos electrónicos (calculadora). Pero desde Euclides se ha cultivado la teoría de los números, resolución de ecuaciones con enteros, el algoritmo de la división (cómo encontrar el máximo común divisor de dos números enteros positivos) y factorizar en números primos, como parte de la aritmética.

Esta álgebra de números (aritmética) nace con la búsqueda de soluciones enteras positivas a ecuaciones como estas:

$$y^2 = x^3 + 2$$
$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Sorprendentemente ayudan a introducir números de la forma:

$$a + b\sqrt{2}$$
$$a + b\sqrt{-2}$$

Donde **a**, **b** son enteros ordinarios, y se pretende que estos nuevos números se comporten como enteros ordinarios. La prevención es realmente justificable, dado que nos permite desarrollar y explorar la teoría de los números primos.

Para esta fracción 2727931/2336107, ¿cómo saber si está en su forma reducida? Es decir, que ningún divisor común al numerador y al denominador existe. Para responder esta pregunta, tenemos que encontrar el máximo común divisor de 2727931 y 2336107, que parece difícil. Incluso encontrar los divisores de 2727931 parece difícil, y de hecho no hay ningún buen método para números muy grandes. Es destacable, que puede ser más difícil encontrar los divisores comunes de dos números, que encontrar los divisores de cada uno de ellos. Por ejemplo, independientemente sabemos que el máximo común divisor de 30000033 y 30000032 es 1, sin saber los divisores de cualquiera de estos números. ¿Por qué? Pues bien, si **d** es un divisor común de 30000033 y 30000032 tenemos

30000032=dp

30000033=dq

Donde **p** y **q** son enteros positivos. Y por lo tanto

30000033- 30000032= d(q - p)

Donde también divide a la diferencia de 30000032 y 30000033, que es 1. Pero el entero positivo solo se divide sobre 1, entonces **d=1**. Más generalmente, si **d** es un divisor común de dos números **a** y **b**, entonces **d** también divide **a - b**. En particular el máximo común divisor de **a** y **b** es un divisor de **a - b**.

Este simple hecho es la base de un algoritmo eficiente para encontrar el máximo común divisor. Se llama **algoritmo euclidiano**, escrito por Euclides en su libro Elements hace más de 2000 años. Formalmente uno calcula una secuencia de pares de números de la siguiente manera. Comenzando con un determinado par **a, b**; donde **a>b**, cada nuevo par consiste en el miembro más pequeño de la pareja anterior y la diferencia de la anterior pareja. El algoritmo termina cuando un par de números son iguales o cuando la menor diferencia comienza de nuevo a crecer, cada uno de ellos es el máximo común divisor de **a** y **b**. Por ejemplo si fuera a=76 y b=64

$$
\begin{aligned}
76,\ 64 &\to 64,\ 76-64=64,12\\
&\to 12,\ 64-12=12{,}52\\
&\to 12,\ 52-12=12,40\\
&\to 12,40-12=12,\ 28\\
&\to 12,28-12=12,\ 16\\
&\to 12,\ 16-12=12,4\\
&\to 4,\quad 12-4=12,\ 8\\
&\to 8,\quad 12-8=12,\ 4\\
&\to 4,\quad 12-4=12,\ 8
\end{aligned}
$$

gcd(76,64)=gcd(64,12)=gcd(52,12)=gcd(40,12)=gcd(28,12)=gcd(16,12)= gcd(12,4)=4

La principal razón por la que el algoritmo euclidiano funciona es porque el máximo común divisor de a y **b** también divisor de **a - b**. Si se denota como gcd, entonces gcd(a,b)=MCD(b, a-b) para a=13 y b=8:

$$
\begin{aligned}
13,\ 8 &\to\ 8,\ 13-8=8,5\\
&\to\ 5,\ \ 8-5=5,3\\
&\to\ 3,\ \ 5-3=3,2\\
&\to\ 2,\ \ 3-2=2,1\\
&\to\ 1,\ \ 2-1=1,1
\end{aligned}
$$

gcd(13,8)=gcd(8,5)=gcd(5,3)=gcd(3,2)=gcd(2,1)=gcd(1,1)=1

Tome en cuenta que, cuando empezamos con los números de Fibonacci consecutivos 13 y 8, la resta son todos los anteriores números de Fibonacci, terminan inevitablemente en el número 1. Es el mismo con cualquier par de números consecutivos de Fibonacci, por lo que MCD de cualquier par de estos es 1. Por ejemplo a=2584 y b=1597

$$
\begin{aligned}
&2584,\ 1597 \to 1597,\ 2584-1597=1597,987\\
&\quad \to 987,\ 1597-987=987,610\\
&\quad \to 610,\ 987-610=610,377\\
&\quad \to 377,610-377=377,\ 233\\
&\quad \to 233,377-233=233,\ 144\\
&\quad \to 144,\ 233-144=144,89\\
&\quad \to 89,\quad 144-89=89,55\\
&\quad \to 55,\quad 89-55=55,\ 34\\
&\quad \to 34,\quad 34-21=21,\ 13\\
&\quad \to 13,\quad 21-13=13,\ 8\\
&\quad \to 8,\quad 13-8=8,\ 5\\
&\quad \to 5,\quad 8-5=5,\ 3\\
&\quad \to 3,\quad 5-3=3,\ 2\\
&\quad \to 2,\quad 3-2=2,\ 1\\
&\quad \to 1,\quad 2-1=1,\ 1
\end{aligned}
$$

Otra razón importante, es que el algoritmo produce continuamente números más pequeños y por lo tanto, termina con números iguales porque enteros positivos no pueden disminuir para siempre. Este principio asegura que no encontraremos ninguna pendiente de descenso infinita, es obvio, sin embargo, es prueba por inducción y base de la teoría de números.

Propiedad de la división. Para cualquier número natural **a** y **b** diferentes de cero, son números naturales **q** y **r** (cociente y resto) tal que

$a = qb + r$
donde
$|r| < |b|$

La ventaja de la división con el resto es que es al menos generalmente es mucho más rápido, que restas repetidas. Es lo suficientemente más rápido para encontrar el MCD de números con miles de dígitos. Por ejemplo a=93164 y b=5826:

Paso 1: 93164 dividido entre 5826 es 15 y sobran 5774
Paso 2: 5826 dividido entre 5774 es 1 y sobran 52
Paso 3: 5774 dividido entre 52 es 11 y sobran 2
Paso 4: 53 dividido entre 2 es 26 y sobran cero

1) $93164 = 5826 \times 15 + 5774$

2) $5826 = 5774 \times 1 + 52$

3) $5774 = 52 \times 11 + 2$

4) $52 = 2 \times 26 + 0$

Así que gcd(93164, 5826)=2

El **algoritmo euclidiano**, como cualquier algoritmo produce una secuencia de eventos. Cada evento depende de una manera sencilla del evento anterior, pero uno no capta toda la secuencia en una sola fórmula. Si embargo en realidad es una fórmula, la llamada **fracción continua**.

Por ejemplo, cuando aplicamos el algoritmo euclidiano para el par 211,27 produce la secuencia de coeficiente 7;1,4,2,2. Esta secuencia es capturado por la ecuación

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{22}{27}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{27/22}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{22}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{22/5}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{2}{5}}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5/2}}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

En esta etapa el proceso se detiene porque el resto es 1 y previo divisor es 2, y es exacta. Puesto que el algoritmo euclidiano, produce números que disminuyen en tamaño, por lo tanto, siempre se detiene. Así que cualquier número racional positivo tiene una fracción continua finita. Y por contrario, si una relación de números produce una fracción continua infinita, la relación es irracional. Hasta ahora no habíamos contemplado aplicar el Algoritmo euclidiano para números… obviamente proporciones racionales. El resultado es sorprendentemente simple y satisfactorio cuando aplicamos el algoritmo de fracción continua a $\sqrt{2}+1$ y 1.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$$

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Ahora ocurre esto:

Al aplicar separación entera y parte fraccionaria

$$\sqrt{2}+1 = 2 + (\sqrt{2}-1)$$

Puesto que $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

No hay necesidad de ir más allá, el denominador $\sqrt{2}+1$ a la derecha ahora puede ser sustituido por

$$2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Así que $\sqrt{2}+1$ ocurre de nueva vez y así sucesivamente. Por lo tanto, el algoritmo de fracción continua nunca se detendrá.

El $\sqrt{2}+1$ es irracional, y por tanto raíz de dos lo es también. Los griegos sabían que raíz de dos es irracional, por lo que queda la duda si ellos sabían esta demostración. Sin duda, Euclides sabía que el algoritmo euclidiano implica a la irracionalidad. Es posible que los irracionales fueran descubiertos de esta manera.

Ejercicios 1: Para los pares de números realizar gcd(n,m) por algoritmo de restas y por el de la propiedad de división.

1) gcd(53,19)=1
2) gcd(987,61)=1
3) gcd(233,55)=1
4) gcd(177,51)=3
5) gcd(512,42)=2

Ejercicios 2: Obtener la **fracción continua** para los pares siguientes determinando si es irracional o racional la fracción.

1) par 223,21
2) par 121,13
3) par 172,5

Estimado lector, pero Usted se preguntara de nueva vez por qué ampliar el pensamiento matemático cuando el estudiante promedio no puede realizar operaciones aritméticas con números fraccionarios. Ahora toca en este apartado resolver la aritmética de pares ordenados o llamados fraccionarios del tipo **a/b**.

1. Suma de fracciones

La suma con denominador común:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{19}{28}+\frac{9}{28}=1$$
$$\frac{7}{16}+\frac{27}{16}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$$
$$\frac{27}{11}+\frac{24}{11}=\frac{51}{11}$$
$$\frac{24}{23}+\frac{16}{23}=\frac{40}{23}$$
$$\frac{21}{11}+\frac{30}{11}=\frac{51}{11}$$

Sustracción con denominador común:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$\frac{6}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$
$$\frac{7}{17}-\frac{16}{17}=-\frac{9}{17}$$
$$\frac{6}{5}-\frac{13}{5}=-\frac{7}{5}$$
$$\frac{4}{23}-\frac{13}{23}=-\frac{9}{23}$$
$$-\frac{17}{5}+\frac{14}{5}=-\frac{3}{5}$$
$$\frac{17}{25}-\frac{29}{25}=-\frac{12}{25}$$

La suma con denominador no común:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=(\frac{3}{4}\bullet\frac{7}{7})+(\frac{2}{7}\bullet\frac{4}{4})=\frac{21}{28}+\frac{8}{28}=\frac{29}{28}$$

$$\frac{23}{21}+\frac{12}{23}=(\frac{23}{21}\bullet\frac{23}{23})+(\frac{12}{23}\bullet\frac{21}{21})=\frac{529}{483}+\frac{252}{483}=\frac{781}{483}$$

$$\frac{14}{13}+\frac{7}{3}=(\frac{14}{13}\bullet\frac{3}{3})+(\frac{7}{3}\bullet\frac{13}{13})=\frac{42}{39}+\frac{91}{39}=\frac{133}{39}$$

$$\frac{6}{11}+\frac{7}{19}=(\frac{6}{11}\cdot\frac{19}{19})+(\frac{7}{19}\cdot\frac{11}{11})=\frac{114}{209}+\frac{77}{209}=\frac{191}{209}$$

La substracción con denominador no común:

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=(\frac{5}{9})-(\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{3})=\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{32}{21}-\frac{25}{8}=(\frac{32}{21}\bullet\frac{8}{8})-(\frac{25}{8}\bullet\frac{21}{21})=\frac{256}{168}-\frac{525}{168}=-\frac{269}{168}$$

$$\frac{8}{3}-\frac{5}{4}=(\frac{8}{3}\bullet\frac{4}{4})-(\frac{5}{4}\bullet\frac{3}{3})=\frac{32}{12}-\frac{15}{12}=\frac{17}{12}$$

$$-\frac{14}{5}+\frac{11}{2}=-(\frac{14}{5}\bullet\frac{2}{2})+(\frac{11}{2}\bullet\frac{5}{5})=-\frac{28}{10}+\frac{55}{10}=\frac{27}{10}$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{23}{8}=-(\frac{5}{2}\bullet\frac{8}{8})+(\frac{23}{8}\bullet\frac{2}{2})=-\frac{40}{16}+\frac{46}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{3}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{24}{21}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$-\frac{38}{15}\times\frac{-9}{20}=\frac{57}{50}$$

$$-\frac{30}{23}\times\frac{2}{3}=\frac{-60}{69}=\frac{-20}{23}$$

$$\frac{3}{22}\times\frac{24}{13}=\frac{72}{286}=\frac{36}{143}$$

División de fracciones:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{7}{5} = \frac{1\times5}{2\times7} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{9}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{9\times8}{4\times3} = \frac{72}{12} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{9}{4} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{38}{21} \div \frac{11}{24} = \frac{-38\times24}{21\times11} = \frac{-912}{231} = \frac{-304}{77}$$

$$-\frac{32}{13} \div \frac{21}{11} = \frac{-32\times11}{13\times21} = \frac{-352}{273}$$

Simplificación de fracciones:

$$\frac{42}{28} = \frac{14\times3}{14\times2} = \frac{14}{14}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{140}{180} = \frac{20\times7}{20\times9} = \frac{20}{20}\times\frac{7}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{280}{100} = \frac{20\times14}{20\times5} = \frac{20}{20}\times\frac{14}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{96}{72} = \frac{24\times4}{24\times3} = \frac{24}{24}\times\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{114}{209} = \frac{19\times6}{19\times11} = \frac{19}{19}\times\frac{6}{11} = \frac{6}{11}$$

Como muchas ramas de las matemáticas, la historia de la teoría de los números comienza con Euclides. Elements contiene las primeras demostraciones de descenso (la existencia de factorización y terminación del algoritmo euclidiano), la primera prueba de la existencia infinita de los números primos y el primer estudio extenso de números irracionales, Euclides también hizo un gran avance en un tema que ha progresado muy poco desde entonces: números primos de la forma 2n-1 y números perfectos.

Los números enteros positivos se llaman **números perfectos** si es la suma de sus divisores propios positivos menos sí mismo. Por ejemplo, los divisores de 6 son 1, 2 y 3 y 6=1+2+3, por lo que es un número perfecto. Los dos siguientes números perfectos son

28, 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328,…

Euclides descubre que $2^{n-1}(2^n-1)$, es una forma alternativa de escribir un número perfecto, cuando se cumple que 2^n-1 es un primo. Su prueba es muy simple, si escribimos p= 2^n-1 los divisores apropiados de $2^{n-1}p$ son debido a la factorización única.

$6=2\times3=2^1(2^2-1)$ $\quad n=2$
$28=4\times7=2^2(2^3-1)$ $\quad n=3$
$496=16\times31=2^4(2^5-1)$ $\quad n=5$
$8128=32\times127=2^6(2^7-1)$ $\quad n=7$
$33550336=4096\times8191=2^{12}(2^{13}-1)$ $\quad n=13$

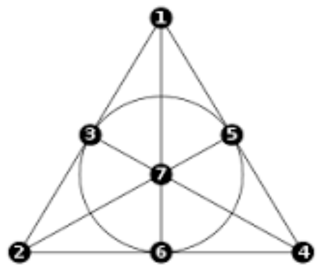
Si
$1,2,2^2,...,2^{n-1}$
y
$p,2p,2^2p,...,2^{n-2}p$

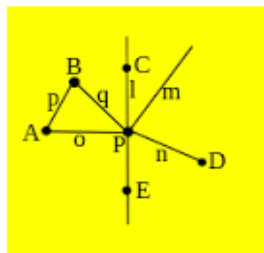
La suma del primer grupo es 2^n-1, y la suma del segundo grupo es
$(2^{n-1}-1)p=(2^{n-1}-1)(2^n-1)$
Por lo que es la suma de los divisores propios [divisores propios, se dice que un número entero **b** es divisible entre un número entero **a** (distinto de cero) si existe un entero **c** tal que **b=a x c**]

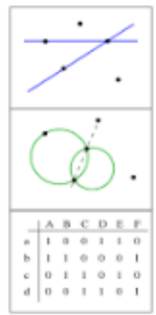
$(2^n-1)(1+2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2^n-1)$ será necesario.

Todavía no sabemos sobre una descripción clara de los números primos de la forma 2^n-1. Menos aún sabemos si hay infinitamente muchos de ellos. Y, finalmente, no sabemos si hay algún número perfecto impar en todos ellos. Menos aún se sabe de los números primos de la forma 2^n+1, pero vale la pena mencionar porque desempeñan un papel inesperado en un problema geométrico antiguo: la construcción regular de m-gons con regla y compás[63]. Euclides dio construcciones de polígonos regulares de m=3 (triángulo equilátero) y m=5 (Pentágono regular) y para valores de m se deriva de estos por tomar su producto y doblar varias veces el número de partes, Gauss construyó un 17-gons (polígono regular de 17 lados) en 1796. Un polígono generalizado es una estructura m-gons de estructura de incidencia introducida por Jacques Tits en 1959.

Una estructura de incidencia es un triple (P, L, I) donde P es un conjunto cuyos elementos se llaman puntos, L es un conjunto disjunto cuyos elementos se llaman líneas y $I \subseteq P \times L$[64] es la relación de incidencia simétrica[65].







La clase del descubrimiento del patrón de Gauss es que 3, 5 y 17 son primos de la forma
$2^n - 1$ es decir,

$$3 = 2^1 + 1$$
$$5 = 2^2 + 1$$
$$17 = 2^4 + 1$$

Gauss encontró de hecho que los polígonos construibles con un número primo de lados, son aquellos para los cuales el primo es de la forma $2^n + 1$. Puede ser demostrado fácilmente que los primos son realmente de la forma $2^{2^k} + 1$, pero solo cinco de ellos son conocidos:

$$3 = 2^{2^0} + 1$$
$$5 = 2^{2^1} + 1$$
$$17 = 2^{2^2} + 1$$
$$257 = 2^{2^3} + 1$$
$$65537 = 2^{2^3} + 1$$

Así, a pesar de que Euclides probo que hay infinitamente muchos números primos, los intentos de encontrar primos de las formas $2^n + 1$ y $2^n - 1$, han sido un fracaso rotundo. No cabe duda que los primos son el concepto más sencillo y difícil en las matemáticas, por lo que son, probablemente, el concepto que mejor resume la naturaleza de las matemáticas en sí mismas. Le vemos aparecer otra vez, en los lugares donde las matemáticas son particularmente interesantes y difíciles.

Los números primos son los enteros positivos fáciles de definir pero difíciles de comprender, son mayores de 1 que no son productos de enteros positivos más pequeños. Así la secuencia de números primos comienza con

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Cada número entero positivo **n** puede factorizarse en números primos, porque si **n** no es primo, es un producto de números enteros más pequeños **a** y **b**, nosotros podemos repetir el argumento con **a** y **b**: si cualquiera de ellos no es primo, entonces es el producto son números enteros positivos más pequeños y así sucesivamente. La factorización de primos es una pendiente finita. En resumen, un número primo no incluye al 1, por que este es la unidad, ni es primo y ni es compuesto. Un **número compuesto** es el que se obtiene multiplicando otros dos números. Todos los primos son impares excepto el 2, que es el único par encontrado. La factorización prima de números mayores a 1, es única sin importar el orden de los factores, por eso 1 no se considera primo. Pero, para retomar ahora las pendientes infinitas descendentes, citaremos a Fibonacci 1202 y Fermat 1670. Fibonacci utilizó el método para encontrar lo que ahora se llaman fracciones egipcias. Los antiguos egipcios tenían una curiosa manera de tratar con fracciones escribiendo a cada fracción entre 0 y 1 como la suma de las distintas fracciones de la forma 1/n, llamada **fracción unidad**.

$$\frac{13}{7}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$$

No es difícil encontrar fracciones como estas por ensayo y error, pero cómo podemos estar seguros. Fibonacci dio un método que puede ser probado para alcanzar el éxito, es decir, varias veces elimina la fracción más grande de la unidad. Método de Fibonacci siempre funciona porque, sin un b es una fracción en su mínima expresión y **1/n** es la fracción más grande de la unidad menos que **a/b**, entonces

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{n}=\frac{na-b}{bn}=\frac{a'}{bn}$$

Es tal que $a'<a$. Si $na-b\geq a$ luego $a/b>1/(n-1)$, por eso que 1/n no es la más grande fracción de unidad menos que a/b. Así el numerador del resto disminuye continuamente hasta detenerse (necesariamente en 1) en un número finito de pasos. Aquí mostramos como es esto para 5/7:

1/2= mayor fracción a la unidad< 5/7

Así que considere

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$ Note que 3<5

Siguiente

1/5= es mayor fracción < 3/14

considere

$$\frac{3}{14}-\frac{1}{5}=\frac{1}{70}$$ Esto da por terminado

La solución es

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70}$$

Otra manera es aplicando el método de James Joseph Sylvester, produce la representación de número racional r = a/b entre 0 y 1 como fracción egipcia:

1. Encontrar la fracción unitaria más ajustada a r pero menor que **r**. El denominador se puede hallar dividiendo **b** entre **a**, ignorando el resto y sumando 1. Si no hay resto, **r** es una fracción unitaria, así que ya no hay que seguir calculando.
2. Restar la fracción unitaria de **r** y aplicar de nuevo el paso 1 utilizando la diferencia entre las dos fracciones como **r**.

Para 5/7

5/7= 0 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/2

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

14/3= 4 con algún resto, entonces la siguiente fracción unitaria es 1/5

$$\frac{3}{14}-\frac{1}{5}=\frac{1}{70}$$

1/70 es una fracción unitaria y se concluye.

Ejemplo 1: para 21/32

21/32= 0 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/2

$$\frac{21}{32}-\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

32/5= 6 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/7

$$\frac{5}{32}-\frac{1}{7}=\frac{3}{224}$$

224/3= 74 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/75

$$\frac{3}{224}-\frac{1}{75}=\frac{1}{16800}$$

1/800= es una fracción unitaria y se concluye.

Es importante notar que las fracciones egipcias no son única la posibilidad, por ejemplo para 19/20

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180}$$

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

El resultado de Fermat fue considerado más sofisticado que el de Fibonacci, pero similar en su origen. Él probó que no hay ningún entero positivo x,y,z tal que

$$x^4+y^4=z^2$$

Demostrando que cualquier supuesta solución, es una solución más pequeña. Los enteros positivos no pueden disminuir indefinidamente, tenemos una contradicción. Fue Fermat quien introdujo el término **descenso** de este tipo de prueba. Se aplica la palabra descenso a cualquier prueba que se basa en el hecho de un descenso infinito posible en los números enteros positivos.

Como ya hemos expresado, los irracionales fueron reconocidos hace más de 2 mil años, pero es en los últimos 150 años que los detalles más importantes fueron revelados. En 450 antes de Cristo, los griegos desarrollaron matemáticas puras, desde entonces es constante el nombre que se les dio a los números irracionales, demostrando que el lado y la diagonal de un cuadrado no se puede medir simultáneamente por la misma unidad o, dicho de otro modo, que la diagonal es inconmensurable con cualquier unidad que se mida el lado. Una responsabilidad moderna para nosotros, es reconciliar lo inconmensurable con lo irracional. Los irracionales irrumpen en la historia para dejar claro que no hay lugar permanente en el mundo de las matemáticas. ¿Qué entendemos por número irracional? Es un número inconmensurable que no se puede expresar como el cociente de dos enteros. O es un número decimal que no es finito ni recurrente. Para ambas definiciones, lo irracional se define en términos de lo que no es, es algo así como definir un número impar de uno que no lo es. Mas aún, estas respuestas están plagadas de limitaciones: por ejemplo, ¿cómo utilizamos para definir igualdad entre, o las operaciones aritméticas de dos números irracionales? Aunque esto es familiar, las definiciones anteriores son absolutamente inútiles en la práctica. Por ello, los números irracionales están siendo definidos en términos de una de sus cualidades características, no como entidades que no existen. ¿Quiénes somos para decir que todos ellos existen? Por novedad, adoptamos un tercer enfoque:

Puesto que cada número racional **k** puede ser descrito como:

$$k=\frac{\left(k-1\right)+\left(k+1\right)}{2}$$

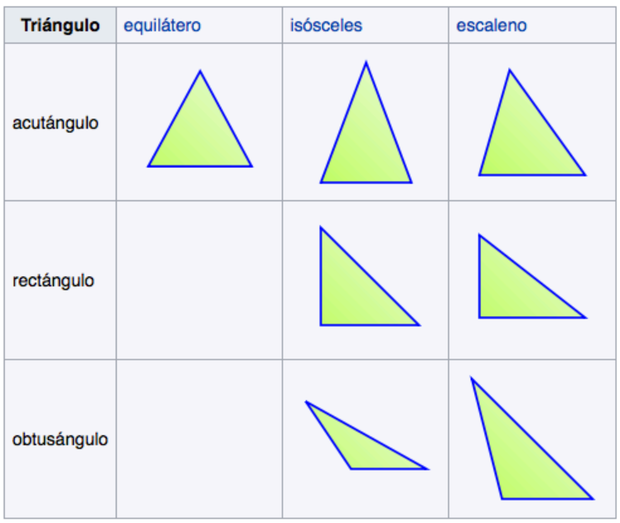
Cada número racional es equidistante de los dos otros números racionales (en este caso k+1, k-1);: por tanto, ningún número racional es tal que es una distancia diferente de todos los demás números racionales.

Con esta observación definimos los números irracionales como: el conjunto de todos los números reales con diferente distancia de todos los números racionales.

El conjunto de los números racionales es del mismo tamaño que el conjunto de números enteros, pero los números racionales son mucho más numerosos. Este problema estuvo a fuego lento durante siglos, en el siglo XIX matemáticos más rigurosos examinaron este hecho. De regreso a los griegos, "todas las cosas son números" era la máxima de Pitágoras y central a su filosofía. Número significó solo los discretos enteros positivos, con 1 como unidad por lo que fueron medidos todos los otros números. Esto significó que todos los pares de números eran múltiplos de la unidad; es decir, todos los pares de números eran conmensurables por la unidad. En contraste, longitudes, áreas, volúmenes, masas,..., eran cantidades continuas, las magnitudes físicas sirvieron a los griegos en lugar de los números reales. Cocientes discretos eran expresiones seguras y su magnitud se podría prever también, siempre que los dos valores afectados fueran del mismo tipo. Además, la declaración de proporciones A/B=C/D donde en un lado de la igualdad se encuentran magnitudes de un tipo y del otro de otro tipo. Además, su estudio de las escalas musicales reveló que estas coinciden con la armonía musical de los sonidos, medidos como radios de números enteros de longitudes de cuerda, por ejemplo, la octava corresponde a una relación de longitud de 2 a 1 y un perfecto 3 a 2. Esto evidencia la continuidad, que se podría medir en forma discreta. Vieron que las modificaciones y las proporciones de las escalas musicales eran expresables en números; desde entonces, todo lo demás parecía en su naturaleza entera para modelar en números los cielos y las cosas como sí fueran proporciones o escuelas que demuestran que la realidad son números.

Con este dogma Pitagórico, todo estaba listo para una fuerte crisis matemática de auténtico escándalo lógico. Entre Antioch y Proclus atribuyeron la definición de ángulo como una cantidad, específicamente la distancia entre líneas o planos. Con la autoridad de Proculos, Thales, el primero de los siete sabios de la tradición griega, trajo de Egipto a Grecia los siguientes postulados geométricos:

1. Un círculo es atravesado por cualquier diámetro.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos entre dos rectas que se cruzan son iguales.
4. Dos triángulos son iguales sin tienen dos ángulos y un lado igual.



Estos parecen desde nuestro tiempo logros muy modestos, sin embargo, su simplicidad desmiente su significado, como exhiben el germen de los procedimientos deductivos de la filosofía griega, recuerde que aún civilizaciones egipcias y babilónicas no tenían ningún pensamiento axiomático, abstracto o generalizado para resultados matemáticos. Estas recetas individuales son desde luego muy importantes, pero no son resultado de un proceso deductivo. Para darnos una idea de la magnitud de las recetas de Thales, deberíamos estudiar la enorme aplicación que ha significado el Teorema de Pitágoras. Con esto, la dirección del progreso matemático fue determinada como la cuna de la ciencia, al prosentar las bases del razonamiento deductivo para inferir conclusiones lógicas.

El innombrable inconmensurable, estaba listo para crear una crisis matemática sin precedente. Tenga presente que los griegos llamaron al inconmensurable lo que hoy llamamos número irracional. Tengamos presente que para los pitagóricos todas las cosas existentes son números, la propia existencia es un número, y además introducen los términos: magnitud, longitud, área, volumen, lo que significó que no solo fueron notas musicales. Cualquier longitud era conmensurable entre sí, es decir, dados dos lineas de diferente longitud, para los pitagóricos allí debe existir una tercera línea la cual es su común unidad. En notación moderna, l_1 y l_2 con unidad común **u**, deben existir enteros n_1 y n_2 tales que

$$l_1 = n_1 u$$

$$l_2 = n_2 u$$

La consecuencia de esto es que

Çç la relación entre dos magnitudes cualquiera es el cociente de dos enteros

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_1 u}{n_2 u}$$

Y la conveniencia del dogma filosófico depende de este resultado. En notación moderna, la unidad se llama monada, el proceso de demostración es

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$$

Nos da

$$b = \frac{a+c}{2}$$

La media aritmética;

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

Nos da

$$b = \sqrt{ac}$$

La media geométrica.

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$$

Nos da

$$b = \frac{2}{1/a + 1/c}$$

La media harmonica.

Con la formula de la media geometrica

$$\frac{b}{1} = \frac{2}{b}$$

Tenemos la aparición de $\sqrt{2}$.

Dicho esto, se le atribuye a Hippasus de Metapontum, se le acusa de destruir el concepto de conmensurabilidad que rompió el dogma hermético de Pitágoras y fue Proclus quien respaldó este hecho, sacudiendo los cimientos de una realidad continua, algo semejante a la teoría cuántica que hace ver en forma discreta la realidad. Los pitagóricos habían hecho encajar la idea de que el mundo es algo cuantificable o medible, como forma cosmológica continua, pero los inconmensurables como cociente de dos magnitudes, significa que la herramienta geométrica fundamental se asemeja a un acto de probar la existencia. Los inconmensurables Platón los refirió como inmencionables, quizá con la idea de ocultar el poder de este descubrimiento respecto al mundo religioso. El método de prueba sobre raíz de dos, es un misterio, se cree que se realizó mediante un cuadrado de lado uno y de alguna manera al intentar demostrar su longitud diagonal se descubre que es inconmensurable, así lo mencionó el Libro Elements. En forma moderna supongamos que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Donde a y b son números enteros en sus términos más bajos. Luego

$$a^2 = 2b^2$$

Así que a^2

Si escribimos a=2k, entonces

$$a^2 = 4k^2$$

y

$$b^2 = 4k^2$$

Por lo tanto, en su forma geométrica se esconde su belleza inherente de la discusión.

Desde este punto los griegos no hicieron nada para abrazar a los irracionales, habían evitado tanto como les fuera posible utilizar la geometría para sobrellevar a estos números, los romanos tampoco hicieron nada para adelantar en esta materia el pensamiento sobre los irracionales. Si queremos continuar con el avance histórico de estos números, tendremos que mirar a las civilizaciones Hindú y Árabe. Para los primeros, investigar la matemática no fue un deseo de pureza abstracta como fue para los griegos, sino una mezcla de las necesidades de hacer frente a la práctica contable, astronomía y astrología. Y además, el deseo de entender la teoría del sistema numérico; de ellos fue la aceptación del cero como el conjunto vacío y neutro entre positivos y negativos, y perfeccionaron el sistema de posiciones base 10 y desarrollaron las raíces cuadradas de números. Esto no significó el progreso filosófico respecto a los irracionales, solo fueron aceptados como números y manipulados de la misma manera como a los racionales, creando la aritmética irracional. Para estos antiguos Hindúes no implicó una raíz cuadrada, para estos dos enteros a y b su prescripción resulta en

$$\frac{1}{c}\left(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}\right)^2=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2$$ Y así

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{c}\left(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}\right)^2}$$

Por supuesto la idea era crear cuadrados perfectos al introducir un factor, que solo es posible si todos factores primos **a** y **b** aparecen con la misma paridad en su potencia. Si tomamos **a**=3 y **b**=12, podemos tomar a **c**=12 para que ocurra

$$\sqrt{3}\pm\sqrt{12}=\sqrt{\frac{1}{12}\left(\sqrt{36}\pm\sqrt{144}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{12}\left(6+12\right)^2}=\sqrt{\frac{18^2}{12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

Esto resulta complicado para nuestra mirada moderna, pero ciertamente fue una idea de nueva perspectiva.

$$a+b\pm2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2$$

Es decir

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

Otra vez empleando el ejemplo anterior:

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3+12+2\sqrt{3}\sqrt{12}}=\sqrt{3+12+2\sqrt{36}}$$

$$\sqrt{15+12}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

Los Hindúes desarrollaron estas equivalencias:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \pm 1\right)^2}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\frac{1}{a}\left(a \pm \sqrt{ab}\right)^2}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c\left(\sqrt{\frac{a}{c}} \pm \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2}$$

A su manera los hindúes podían manipular los números irracionales de la forma de raíces cuadradas de números enteros no cuadrados.

Pero fueron los Árabes los que introducen los conceptos de álgebra y algoritmo por ejemplo. Fue el desarrollo del álgebra que provoco significativamente el uso de números irracionales que difumina la distinción entre tipos de números: enteros, racionales o irracionales, estos últimos tratados como raíz de un tipo de ecuación; el manipular la ecuación implica emplear números de este tipo.

Leonardo Bonacci, Leonardo Bigollo o Leonardo Pisano, o más reconocido en nuestro tiempo como Fibonacci (1170-1250 d.c.). Fibonacci se hace famoso por aportar una secuencia de números para el problema de cría de conejos, pero él fue un gran teórico de los números y desde niño aprendió el sistema hindú de numeración decimal y en sus viajes a Medio Oriente se hace de conocimientos matemáticos desconocidos en Europa. El cero y la noción de serie numérica pronto los reconoce como de enorme ventaja para hacer avanzar a la humanidad en el terreno aritmético. El tratamiento de los números inconmensurables de Euclides en particular le despertó enorme curiosidad, se planteó encontrar la raíz (única verdadera) de la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Sus argumentos establecen rápidamente que tal raíz no puede ser integral o racional, por otra parte, no podrá tomar cualquier forma dicha en el Libro X de Euclides *Elements*, y como tal representa un nuevo tipo de número irracional, que no es capaz de construcción por escuadra y compás, haciéndose eco por Omar Khayyam quien afirmó que efectivamente no era posible resolver la ecuación por todo lo conocido hasta ese momento.

Las soluciones encontradas las estimo en un sistema sexagesimal:

$$1;22;07;42;33;04;40 = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6} = 1.36880810785$$

Es una aproximación racional a nueve lugares decimales de exactitud para el número irracional

$$\frac{1}{3}\left(-2 - \frac{13 \times 2^{1/3}}{\left(176 + 3\sqrt{3930}\right)^{1/3}} + \left(352 + 6\sqrt{390}\right)^{1/3}\right)$$

La propia naturaleza cíclica de los objetos celestes requiere que sus movimientos sean conmensurables unos respecto de otros; una prueba contraría destruiría la exactitud de las repeticiones y así el año no sería perfecto. El argumento supone que dos cuerpos se mueven hacia adelante y hacia atrás a la misma velocidad, uno a lo largo del lado y el otro en la diagonal de un cuadrado (con implícito cambio instantáneo de la dirección; si cada uno de ellos sale desde la misma esquina al mismo tiempo), entonces su regreso simultáneo a esa esquina requiere la existencia de los números positivos **n** y **m** hasta que $n\sqrt{2} = m \times 1$, con la irracionalidad de esta representación imposible se tambalea la exactitud. Sin embargo, admitió Fibonacci que llevar esta discusión a los movimientos de los cuerpos celestes requiere una gran discusión. El que estuvo dispuesto a esta empresa fue Edward III arzobispo de Canterbury, tomando la idea de Aristóteles que creía que el cociente de la fuerza a la resistencia de un objeto es proporcional a la velocidad lograda de tal modo, una visión falsa, es decir, un aumento geométrico en el cociente de esa fuerza de resistencia resulta en una aritmética de incremento en velocidad. John Duns Scotus argumentó, que si la velocidad de dos objetos celestes eran inconmensurables entre sí, entonces así seria la distancia que viajarían en periodos de tiempo iguales y esto les haría volver a cierta configuración inicial en algún tiempo futuro imposible. En términos de la ecuación de Bradwardine para los coeficientes de las fuerzas (desconocidas) y las resistencias se espera para el exponente que la fracción de la velocidad sea un número irracional.

Por supuesto, para ese tiempo no había esperanza de acercarse a demostrar rigurosamente esto y se recurrió a un salto casi de fe, extrapolando un caso práctico de aritmética finita a la gran complejidad del movimiento celeste visto desde el año 1350. Sin embargo, este argumento no destruyó la creencia de un año perfecto, pero lo podemos considerar como una de las primeras declaraciones de que los irracionales están presentes en la realidad.

El fraile italiano Franciscan Luca Pacioli (1487) escribió para la "divina proporción: Justo como Dios no puede ser correctamente definido, ni puede ser entendido a través de palabras, esta proporción señala además a través de números inteligibles, no puede expresarse a través de cualquier cantidad racional, pero siempre permanece oculta y en secreto, y los matemáticos le llaman irracional"[66].

Michael Stifel (1544) en su aritmética integra dijo: "con razón se discute si los números irracionales son números verdaderos o falsos. Ya que, en el estudio de figuras geométricas, donde nos fallan números racionales, los irracionales tienen su lugar y demostración exactamente aquellos números que no pueden ser probados… estamos movidos y obligados a admitir que realmente son números, obligados por los resultados que se derivan del movimiento celeste. Por otro lado, otras observaciones no obligan a no considerarlos números. A saber, cuando tratamos de someter a números para evadir a los irracionales… Ahora podemos llamar numero real a la naturaleza que carece de precisión. Por lo tanto, tal como un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, pero se encuentra oculto en una especie de nube infinita".

En cuanto a pi:

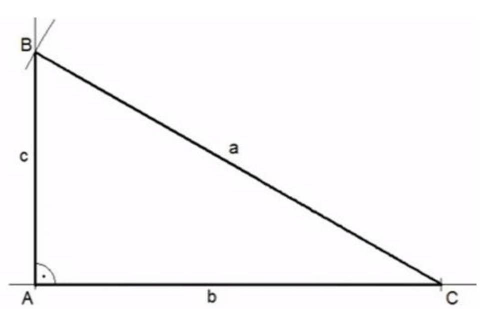
"Por lo tanto el círculo matemático se describe acertadamente como el polígono regular de infinitos números de lados. Y así la circunferencia matemática no requiere de números racionales o irracionales"[67].

Pero finalmente Simon Stevin 1585 fue quien introduce a Europa el sistema decimal Árabe-Hindú y la aritmética de enteros, fracciones e irracionales, así como algo de álgebra polinomios y teoría de las ecuaciones. Para él, 1 era un número, pero cero no fue reconocido como número, aunque los negativos fueron acogidos, los números complejos fueron desechados. Además, él hizo del punto euclidiano algo más al referirlo como un concepto de continuidad[68] al compararlo con un flujo de agua y cada una de sus magnitudes que corresponde a una serie continua. Era impensable que la recta numérica o un plano tuviese perforaciones de caídas descendentes de números irracionales.

Frenchmen Pierre de Fermat (1601-65) y René Descartes (1596-1650) en común matemáticos y filósofos, quizá también en su actitud escéptica. Fermat comúnmente al escribir ecuaciones enseguida investigaba su curva asociada. Descartes escogía una curva conocida e intentaba encontrar la ecuación asociada en términos de "x" y "y". Con el advenimiento de la geometría analítica fue necesario resolver ecuaciones, que eran equivalentes a sus problemas geométricos asociados, pero a menudo estos presentaron raíces irracionales; apenas fue un problema nuevo, pero que ahora asume el momento histórico de mayor desafío práctico. Por ejemplo, el problema de encontrar la distancia entre dos puntos en el plano, con la prevalencia de irracionales cuadráticos, a pesar de que los puntos pueden ser coordenadas racionales, la distancia entre ellos es probablemente un irracional para:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si suponemos una táctica para evitar números irracionales en el conjunto, es decir, solo considerar distancias racionales en el plano. Ahora, supongamos que podemos elegir tres puntos distintos para formar los lados de un triángulo con lados racionales, entonces el coseno con notación estándar tiene que ser



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Este cociente es el ángulo de rotación del triángulo. Si A es racional medido en grados, los valores cos A serán

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$$

Los valores aceptables serian 60º y 90º ya que el mismo debe ser válido para los tres ángulos, para 60º el triángulo es equilátero. En definitiva, los únicos posibles triángulos con lados racionales deben ser equiláteros.

Pasamos ahora un círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1$$

En su forma paramétrica estándar:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Sabemos que contiene un número infinito de puntos racionales, con la parametrización todos ellos con parámetro **t** varían sobre todos los números racionales. Sin embargo, hay un número infinito de puntos en el círculo de al menos una coordinada que es irracional. ¿Pero importa esto? Tratando de encontrar la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ con la línea y=x se revela rápidamente que los números irracionales no se pueden evitar.

Por ejemplo, el círculo $x^2 + y^2 = 5$, otra vez tiene infinitos puntos racionales y almenos una coordenada irracional, Usted lo puede comprobar verificando en su forma parametrizada rotando el valor de **t**.

$$x = \frac{t^2 - 4t - 1}{t^2 + 1}$$

$$y = -2\frac{t^2 + t - 1}{t^2 + 1}$$

Para $x^2 + y^2 = 3$ no hay un solo punto racional por no haber parametrización racional. En fin, con el nacimiento del álgebra geométrica, los números irracionales eran por lo menos implícitamente y explícitamente a menudo indispensables. El cálculo diferencial e integral que pronto nacería necesitaría de una noción de curva geométrica, surgida de rectas que pertenecen a círculos, los círculos son llamados polígonos regulares de **n** lados. Actualmente el problema de los irracionales se trasladó a lo que ahora conocemos como integración, en el continuo de cálculos sobre áreas bajo la curva aparecen los irracionales de nueva cuenta. El uso de infinitesimales hace conciencia de que un número de raíces inconmensurables entre sí, podrían reunir en una suma una relación que explica cantidades racionales, como si la infinitud misma de sumas de áreas infinitesimales destruyera de su interior la irracionalidad.

El número es

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este número es atribuido a Jacob Bernoulli (1654-1705[69]) y Leonhardo Euler. Euler sabía que la forma de fracción continua simple de un número irracional es sin fin. Para demostrar un irracional se necesita construir una fracción continua para ver sí desciende de manera infinita y poder asegurar que estábamos frente a un irracional.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}}}$$

2.71828182845904

El número **e** en forma de fracción continua y en forma de decimal con 14 dígitos

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}}}}$$

Resulta extraño que Euler no hubiera detectado que la irracionalidad de **e** era una consecuencia inevitable de su representación canónica como serie infinita, bien conocida por él.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots$$

Fue Joseph Fourier, quien relaciona la irracionalidad de un número a la serie infinita de su representación.

Hemos descubierto hasta aquí los números trascendentales: $e, \pi, \sqrt{2}$. Si la expansión decimal de un número **a/b** es finita, entonces es un racional. Si la expansión decimal de un número **a/b** es infinita, entonces es irracional.

Lección 18: Álgebra arábiga

Hasta aquí hemos definido un álgebra como un cuerpo o campo cerrado bajo una operación binaria (adición y multiplicación). Implícitamente están las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, inverso simétrico. Además, se exploró por el mundo de los números naturales, enteros, primos, racionales, irracionales y complejos. Ahora toca el turno al lenguaje algebraico de los polinomios, partiremos de conceptos muy simples de leyes de los signos, exponenciales, radicales. Se les llama leyes cuando en realidad son axiomas, es decir, verdades evidentes a nuestra especie.

Leyes de los signos.

$$(+a)+(+a)=+2a$$
$$(+a)+(-b)=+ \qquad si\ \ a>b$$
$$(+a)+(-b)=- \qquad si\ \ a<b$$
$$\frac{+}{+}=+$$
$$\frac{-}{+}=-$$
$$\frac{+}{-}=-$$
$$\frac{-}{-}=-$$
$$(-)\times(-)=+$$
$$(-)\times(+)=-$$
$$(+)\times(-)=-$$

Leyes de los exponentes

$$q^n \bullet q^m = q^{n+m}$$

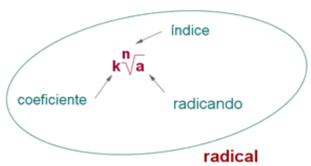
$$\frac{q^n}{q^m} = q^{n-m}$$

$$(qp)^n = q^n p^n$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{q^n}{p^n} \quad si \quad p \neq 0$$

$$\frac{p^n}{q^n} \times \frac{q^n}{p^n} = 1$$

Leyes de los radicales



$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^n = b \quad como \quad \sqrt[n]{b} = a$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{nm}}$$

Valor absoluto de un número real x es:

$$|x| = \begin{cases} x, & si \ \ x \geq 0 \\ -x, & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

x representa una variable que expresa cualquier número real. ax^n Donde **a** es el coeficiente de **x**, **n** el exponente de **x**. Se escribe para:

$x^0 = 1 \ \ y \ \ x^1 = x$

$x^2 = x \bullet x$

$x^3 = x \bullet x \bullet x$

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

$x^{1/2} = \sqrt{x}$

$x^n x^m = x^{n+m}$

$\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Un polinomio es la suma de términos algebraicos en un arreglo decreciente de sus potencias. Se clasifican por el alto grado y el número de variables. La suma de los exponentes de las variables de un término indica el grado de ese término. Un monomio es un polinomio de un término. Cuando el polinomio se da en forma de factores se dice que fue factorizado, en caso contrario cuando está en suma de términos se dice que está expandido.

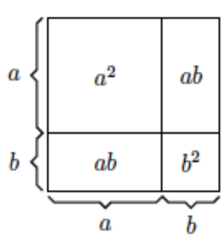
Algunos productos muy útiles en el ámbito escolar son aquellos relacionados con la manipulación de constantes, variables, términos y expresiones con el fin de simplificar y evaluar resolviendo ecuaciones y encontrando los valores de las variables que satisfacen los enunciados verdaderos. Las operaciones de productos de variables son análogas a la aritmética de números reales.

Estos productos se pueden demostrar simplemente aplicando el producto de monomio, binomio,…

$$a(c+d)=ac+ad$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$
$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$
$$(a+b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2=a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$$
$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+ab^4+b^5)=a^6-b^6$$
$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5$$
$$(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b-ab^5+b^6)=a^7+b^7$$
$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a+b^n$$
n *arbitrario entero positivo impar* 1,3,5,7,...

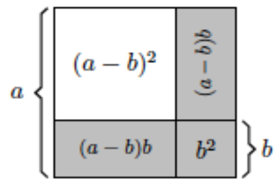
El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado. Si la longitud de los lados es a + b entonces el área es $(a+b)^2$. Sin embargo, el área del cuadrado puede ser dividida en cuatro rectángulos como se muestra en la figura.



Por lo tanto, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos será igual al área del cuadrado, es decir,

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ahora damos una representación geométrica del cuadrado de la diferencia de dos números a, b, donde b ≤ a. El problema ahora es encontrar el área del cuadrado de lado a - b.

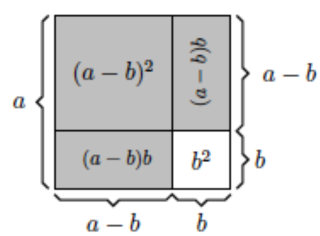


En la figura se observa que el área del cuadrado del lado **a** es igual a la suma de las áreas del cuadrado de lados (a-b) y b, respectivamente, más el área de dos rectángulos iguales con lados de longitud b y (a-b). Es decir, $a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b)$,

por lo tanto

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ahora, para encontrar el área de la región sombreada de la siguiente figura,



Observe que la suma de las áreas de los rectángulos que cubren las regiones es a(a-b)+b(a-b), y factorizando esta suma obtenemos

$$a(a-b) + b(a-b) = (a+b)(a-b)$$

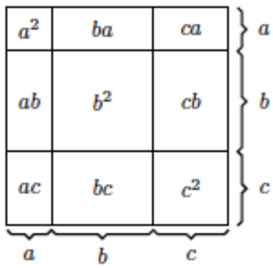
Que es equivalente al área del cuadrado grande, menos el área del cuadrado pequeño, es decir,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Otro producto notable, pero que ahora se ocupa de tres variables, es dado por

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

La representación geométrica de este producto viene dada por la igualdad entre el área del cuadrado con longitud lateral a + b + c y la suma de las áreas de los nueve rectángulos en los que se divide el cuadrado, es decir,



$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+ab+ac+ba+bc+ca+cb=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

A continuación, ofrecemos una serie de identidades, algunas de ellas muy conocidas y otras menos conocidas, pero todas muy útiles para resolver muchos problemas.

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$$
$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$$
$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$
$$x^2+y^2+xy=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}$$
$$x^2+y^2-xy=\frac{x^2+y^2+(x-y)^2}{2}$$

Los productos notables, son un claro ejemplo de la fusión entre la aritmética y la geometría, el álgebra es esta fusión.

Factorización

Una de las formas más importantes de manipulación algebraica se conoce como factorización. Analizamos algunos ejemplos y problemas cuyas soluciones dependen de fórmulas de factorización. Muchos de los problemas que involucran expresiones algebraicas pueden ser fácilmente resueltos usando transformaciones algebraicas en las cuales la estrategia fundamental es encontrar factores apropiados que cuando se multiplican entre sí retorna a la expresión inicial.

Estas identidades algebraicas se catalogan como identidades de segundo orden. De hecho, hemos estudiado estas cuatro identidades en la sección de productos notables. Sin embargo, ahora nos gustaría, dada una expresión algebraica, reducirlo a un producto de expresiones algebraicas más simples.

Para los números reales a, b, x, y, con x e y diferentes de cero, se sigue que

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y}=\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}$$

Para obtener la igualdad, comenzamos con la suma en el lado izquierdo de la identidad y seguimos las igualdades siguientes

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y}&=\frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a+b)^2}{xy(x+y)}\\&=\frac{a^2y^2+b^2x^2-2xyab}{xy(x+y)}\\&=\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}\end{aligned}$$

Factor común al modo de na+nb=n(a+b)

$$9x^3-3x^2y=3x^2(3x-y)$$

$$4x^3y-2xy^2+8x^2y^2=2xy(2x^2+4xy-y)=2xy(2x(x+2y)-y)$$

Diferencias de cuadrados $a^2+b^2=(a+b)(a-b)$

$$x^2-16=(x-4)(x+4)$$

$$4x^2-81y^2=(2x-9y)(2x+9y)$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

Más trinomios

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$
$x^2+xy-6y^2=(x-3y)(x-2y)$
$3x^2-8xy-3y^2=(3x+y)(x-3y)$

Diferencias de dos cubos
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$27x^3+64y^3=(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
Completando cuadrados sumando y restando para completar el cuadrado

$x^4+9=(x^4+6x^2+9)-6x^2=(x^2+3)^2-6x^2$
$x^4+25=(x^2+10x^2+25)-10x^2=(x^2+5)^2-10x^2$

Adición de polinomios

El cálculo de suma de polinomios, para ello, se debe agrupar los términos semejantes y realizar enseguida la suma análoga a la aritmética de números.

$3x+6y^4-4xy$; $0x-5y^4+11xy$; $-8x-2y^4+20xy$

$$\begin{array}{r}
0x-5y^4+11xy\\
3x+6y^4-4xy\\
\underline{-8x-2y^4+20xy}\\
-5x-y^4+27xy
\end{array}$$

Para el caso de la resta, el cálculo requiere que el signo menos opere al polinomio sustraído.
$3x^3-7y^2-4xy$ menos $-2y^2+8xy+13x^3$

$$\begin{array}{r}
(3x^3-7y^2-4xy)\\
\underline{-(13x^3-2y^2+8xy)}\\
-10x^3-5y^2-12xy
\end{array}$$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicación de monomios, ordénese de acuerdo a las reglas de los exponentes y los signos. Además, se multiplican coeficientes a coeficientes y literales a literales del mismo tipo:

$$(4x^4y^5w)\times(5yx^3z^{-1})=\frac{20wx^7y^6}{z}$$

Para el cálculo de una multiplicación a un monomio por un polinomio, cada termino del polinomio es afectado por el factor monomio.

$$(2x^4y^5)\times(7xy^4+2xy+5x)=14x^5y^9+4x^5y^6+10x^5y^5$$

Calcular la multiplicación entre polinomios, se multiplica cada término por cada término del respectivo polinomio, además, un ordenamiento por potencias y literales ayuda en el orden de multiplicación.

$$(5+3x^2)\times(-4x+3xy-x^2)=-3x^4+9x^3y-12x^3-5x^2+15xy-20x$$

División polinomial

Para calcular cocientes entre monomios, aplique las leyes de los exponenciales y divida los coeficientes si es posible.

$$\frac{35x^4y^3z^2}{5x^6y^2z}=\frac{7yz}{x^2}$$

El caso de cálculos de cocientes de polinomios, se llama división larga, debe ordenarlos ascendente o descendente variables y potencias de ambos. De la división de los primeros términos saldrá el cosiente, enseguida multiplicamos cociente por divisor y el resultado lo restamos al dividendo, repetimos los pasos hasta que el residuo sea de menor grado que el divisor o cero.

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = cociente + \frac{residuo}{divisor}$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 4x^2 + 10x + 23 \\ \hline
x^2 - 3x + 2 & 4x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 3 \\
 & 4x^4 - 12x^3 + 8x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & 10x^3 - 7x^2 + x - 3 \\
 & 10x^3 - 30x^2 + 20x \quad\; \\ \hline
 & 23x^2 - 19x - 3 \\
 & 23x^2 - 69x + 46 \\ \hline
 & 50x - 49
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 4x^2 - 2x - 7 \\ \hline
x^2 + 2 & 4x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 3 \\
 & 4x^4 + 8x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & -2x^3 - 7x^2 + x - 3 \\
 & -2x^3 - 4x \quad\; \\ \hline
 & -7x^2 + 5x - 3 \\
 & -7x^2 - 14 \\ \hline
 & 5x + 11
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
 & x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x \\ \hline
x^2 + x + 2 & x^7 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & x^7 + x^6 + 2x^5 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & -x^6 - 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & -x^6 - x^5 - 2x^4 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & -x^5 - x^4 - 2x^3 \quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & 3x^4 + 3x^3 + 6x^2 \quad\quad\quad \\ \hline
 & -4x^3 - 4x^2 + x - 5 \\
 & -4x^3 - 4x^2 - 8x \quad\; \\ \hline
 & 9x - 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
 & x^6 - x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x \\ \hline
x^3 + x^2 + 1 & x^9 - x^7 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & x^9 + x^8 + x^6 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & -x^8 - x^7 - x^6 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & -x^8 - x^7 - x^5 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & -x^6 + x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & -x^6 - x^5 - x^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
 & 2x^5 - 2x^3 + 2x^2 + x - 5 \\
 & 2x^5 + 2x^4 + 2x^2 \quad\quad\quad \\ \hline
 & -2x^4 - 2x^3 + x - 5 \\
 & -2x^4 - 2x^3 - 2x \quad\; \\ \hline
 & 3x - 5
\end{array}$$

Para practicar use: http://library.wolfram.com/webMathematica/Education/LongDivide.jsp

Lección 19: Estadística

La estadística, un poeta diría, “es la que nos permite mirar través de la niebla bizarra del mundo sobre nosotros”. Para comprender la realidad subyacente del significado de los datos, la estadística es una tecnología de métodos que nos permiten extracción del significado dentro de esa niebla. La estadística es esa tecnología para el manejo de la incertidumbre, ese anhelo del hombre de predecir los eventos futuros. Las inferencias acerca de esa neblina, esas que nos arroja datos de lo desconocido para tomar decisiones, previsiones, análisis de la dinámica de la realidad, son la tarea de las estadísticas. Pero porque llamarla tecnología y no una disciplina científica. Una tecnología es la aplicación de los conocimientos científicos, la estadística es la aplicación del conocimiento del cómo refiere a complementar e inferir la información en los datos de la neblina y realizar inferencias sobre sus significados. Una estadística es un hecho numérico o resumen de análisis de datos. Así que de cierta manera un resumen de datos es el que incluye: tamaño, tasas, desviaciones, tendencias y el cómo se recopiló, manipuló, analizó y se dedujo sobre los hechos numéricos. La neblina puede ser una nube de partículas, una sociedad, el espacio climatológico, reacciones químicas, biológicas o el comportamiento de enjambres, parvadas o corrientes moleculares en un recipiente.

Los datos, es una palabra que hace énfasis en la “referencia”, significa algo dado sobre alguna parcela de la realidad. Frases como: los datos nos indican; los datos demuestran; los datos muestran; los datos corroboran la teoría. Los datos son señales de algún tipo sobre algo que está fuera de nuestra mente, ese algo está allí, con independencia y las matemáticas buscan dotarnos de un significado racional sobre eso llamado realidad. El dato tiene significado gracias al cobijo de los hechos. Un hecho es un concepto frontera entre nuestro lenguaje y la realidad, estos conceptos dan el sentido necesario a los datos, que bajo esa semántica categorizan las señales de la realidad. Cuando los datos son procesados por la estadística, se genera un producto estructurado conocido como información. La información es el paso necesario para realizar inferencias (acciones de razonamiento) que eventualmente agrupando inferencias, se produce el pensamiento abstracto que da origen al conocimiento.

Las señales de esa neblina llamada realidad, son comúnmente datos numéricos, producto de realizar ensayos de medición. En teoría si pudiéramos realizar mediciones infinitas sobre un algo, los datos significarían una versión precisa de lo que estamos observando. Mediciones infinitas, no es posible realizarlas, ya sea por cuestiones de tiempo, costo, recursos humanos y tecnológicos. Lo que representan los datos no es la imagen perfecta, no solo por estar impedidos a realizar mediciones infinitas, sino por la propia calidad del dato, toda medición se enfrenta con el error, el ruido e incertidumbre. Sin embargo, los logros asombrosos de la estadística para generar nuevo conocimiento están por todos lados en la vida moderna. Los datos en un principio antes de ser números fueron señales de palabras, colores, sabores, emociones, sonidos, texturas, concentraciones de químicos, movimiento de partículas en el viento. El control de calidad de fármacos, refrescos, automóviles,…, en general todo producto industrial se traduce a números para expresarlo en término de estructuras de información, es decir, en forma de gráficos, ecuaciones, señales de alerta, frases ,…

La controversia sobre las estadísticas, radica no en sus procesos de datos, sino en cómo se utilizan las deducciones para sacar juicios a conveniencia. El papel moderno de la educación es reducir la desconfianza mediante el entendimiento del rigor de la estadística, y justamente advertir que es en la interpretación del resumen estadístico donde hay que poner atención para reconocer si hay justificación para tales inferencias. En muchos casos reportes de investigación sustentan que comer ciertos alimentos son dañinos para la salud humana, basados en juicios estadísticos. Pero el avance científico a nivel de mayor detalle dentro de la complejidad biológica pronto desmiente tales aseveraciones, no a la estadística, sino a las inferencias sobre el resumen estadístico. No es de extrañar que este oficio de las inferencias sobre resúmenes estadísticos, genere conflictos de contradicción.

Datos

Hemos expresado que los datos son la materia prima de la construcción de estructuras de información, son la base objetiva del resumen estadístico que normalmente se expresa en números. Los datos son el resultado de los hechos, son más que números, son el fruto del análisis conceptual de la teoría, es decir, los números deben asociarse con el significado de los hechos. No hay datos posibles que sean precisos y válidos en su calidad, si estos no están respaldados por conceptos sólidos que se justifican en el marco teórico. Además, los datos deben ser en muchos casos vigentes, confiables en el aspecto tecnológico de la medición y el instrumento de registro de su valor verdadero. Otra manera de mirar los datos, es considerarlos como pruebas o evidencias que dan fundamento a ideas y teorías sobre el mundo que nos rodea. Los datos son la conexión con las afirmaciones de nuestras ideas, son los que resquebrajan las viejas ideas e impulsan a las nuevas. Además, los datos no son inmunes a fallas de equipos y límites tecnológicos de los rangos de operación de instrumentos de medición, sin embargo, los datos nos dan certidumbre y tranquilidad sobre nuestras ideas que intentan ser referencia a la verdad en la realidad.

Esto implica que, para ser significativos nuestras ideas y discursos argumentales deben pasar por la verificación objetiva de referencia a los datos. Al comparar nuestros datos con las predicciones podemos confiar o razonablemente abandonar alguna teoría al demostrar su sesgo. Los datos son el camino de exploración a través de este mundo complejo, ellos guían nuestras decisiones sobre los mejores y más prometedores nichos de oportunidad. Dado el papel de los datos para justificar las ideas y la compresión del mundo.

El origen de la estadística es relativamente reciente, unos docientos años. La Royal Statistical Society 1834, sin embargo, antes de su reconocimiento académico, las primeras estadísticas nacieron en el cálculo de probabilidades en juegos de azar, por necesidad de extraer significado razonable de ellos. Otro camino surge al intentar responder a la necesidad de datos estadísticos para tomar decisiones de gobierno en materia militar, económica y cultural. Y es de esta última necesidad que surgió el nombre de estadística: "datos sobre el estado". Todos los países modernos tienen a ahora alguna institución para realizar estudios estadísticos. En el siglo XIX la estadística era un discurso de exploración sobre los datos sociales. Pero es principios del siglo XX con la pujante Mecánica Cuántica que su cuerpo de conocimiento se desarrolló matemáticamente. Y es en los años 70's que la estadística se vuelve emocionante al emplear en tiempo real computadoras, potenciando como nadie imagino una gran cantidad de cálculos de manipulación aritmética que previamente hubiera llevado años, ahora se realiza en minutos. A finales del Siglo XX también se observó la aparición de analistas de datos sobre patrones en grandes volúmenes de datos. Aprender de los datos es sin duda el objetivo de la estadística, es decir, se trata de investigar dentro de lo más complejo de la neblina que llamamos realidad.

Empresas pequeñas y grandes se basan en el control de calidad y en la proyección del futuro de su desempeño, todo a partir del análisis de sus datos y de otros competidores. Estas personas no manipulan símbolos matemáticos y fórmulas, pero están usando herramientas informáticas estadísticas y métodos para obtener conocimiento y entendimiento de la evidencia de los datos. Al hacerlo, necesitan considerar una amplia gama de variables de cuestiones intrínsecamente no matemáticas, tales como la calidad de los datos, cómo fueron recogidos, definir el problema, identificar el objetivo más amplio del análisis y determinar cuánta incertidumbre se asocia con la conclusión.

La estadística es ubicua, se aplica en todos los ámbitos de la vida, esto motivó el desarrollo de métodos nuevos y herramientas estadísticas más especificas. El procesamiento de datos del ADN, partículas subatómicas y redes sociales es solo un ejemplo de estos nuevos horizontes de la estadística. Los métodos estadísticos están en la esencia de la investigación científica, en las operaciones industriales, en la administración pública, en la industria, la medicina y otros aspectos de la vida social humana. El desarrollo de alimentos y medicamentos deben pasar por exhaustivas pruebas estadísticas antes de estar en el mercado. Dado este papel fundamental, claramente es importante para los ciudadanos educados de esta era, para ser conscientes de los instrumentos de toma de decisiones y exploración de lo complejo. Además, la estadística moderna hace uso intensivo de software para procesar los datos, no debe vérsele como manipulación aritmética tediosa de números, este objetivo es fundamental para el interés de las jóvenes generaciones.

El problema con este punto de vista es que puede verse a la estadística como una disciplina de colección de métodos, todos ellos desconectados en la manipulación de números. Por contrario, es un todo conectado, construido en principios profundamente filosóficos, tal como muchas ciencias lo son. Las herramientas de análisis de datos están vinculadas y relacionadas, algunas pueden incluir a otras herramientas como parte de su estructura.

Todo comenzó con la definición de dato. Piezas numéricas que describen al universo que estudiamos. Un universo es una parcela de la realidad que es inagotable en su información potencial. Podría ser una mezcla química, un sistema térmico, un sistema mecánico, transacciones de tarjetas de crédito, desempeño de lectura de estudiantes, productividad intelectual de docentes o simples lanzamientos de dados. En ellos no hay nada de particular que modifique la idea de dato. Por supuesto una colección finita de datos no puede agotar la información contenida sobre algo que es infinito para su descripción. Eso significa que debemos ser cautos de posibles deficiencias o lagunas de los datos. Al capturar los datos debemos además de cuidar su calidad, asegurar que representan los aspectos que deseamos sacar alguna conclusión. Al capturar datos nos vemos en la necesidad eliminar los que son irrelevantes o claramente erróneos. Producir datos está dirigido a objetivos de conocimiento y los aspectos que definen los atributos, características, funciones o aspectos técnicos del objeto de estudio que se les suele llamar variables. No solamente se interesa por un objeto de estudio, sino además por las relaciones entre objetos distintos. Muchos no ven los datos como la belleza del mundo, sienten que es como eliminar su poética. Pero los números tienen el potencial para poder percibir esa belleza, esa estética profunda más allá de nuestros sentidos sensoriales. Sin duda, la estadística es una forma objetiva de revelar lo profundo de sistemas altamente complejos, en los que por pereza intelectual se les suele evadir con salidas como: allí no hay más que desorden, además los números son solo un valor de magnitud. Hemos visto que los números nos dan una interfaz más directa e inmediata a los fenómenos estudiados que el discurso de palabras, porque los datos numéricos normalmente son producidos por instrumentos con más confiabilidad que nuestras palabras. Los números proceden de la cosa estudiada, mientras las palabras son imaginación, los datos son una ventana a través de la lente de instrumentos muy sofisticados de medición. La propia historia de la tecnología es evidencia del arte de representar la realidad con números referidos a datos. En resumen, mientras simples números constituyen los datos, mirar sus raciones entre ellos y quizá combinarlos es donde surge la estadística. El análisis estadístico revela la forma en que están distribuidos estos valores. El valor representativo de media estadística es un primer indicador de la distribución de datos.

Media estadística

Es uno de los tipos más básicos de la descripción de datos. Es una medida de tendencia central sobre un conjunto de números. Es decir, es el promedio de una lista de números, y sea hace más útil si la lista es muy grande. Para fines de calificación, edad o estaturas nos ayuda a tomar decisiones en dónde está el grueso de los datos. Qué entenderemos por media estadística o media aritmética. Imagine una tabla con un millón de datos, todos ellos son el mismo número, la media aritmética se calcula más fácilmente sumando el total de los números y dividiendo este resultado entre cuantos son.

Por ejemplo, las calificaciones de un estudiante en el semestre fueron 7+9+6+4+9+10, suman 45. La media aritmética de un número de un conjunto de números, que se encuentra dividiendo a 45 entre en número total de datos, en este caso es 6. Es 7 1/2. Obtendríamos el mismo resultado si cada una de las 6 evaluaciones fueran 7 1/2, esto serie una distribución de media estadística.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Donde **n** es igual al número de datos, y las x_i son cada uno de los datos.

La **media aritmética** siempre toma un valor entre los valores mayor y menor del conjunto de datos. Por otra parte, equilibra los números en el conjunto, en el sentido de que la suma de las diferencias entre la media aritmética y los valores más grandes, es exactamente igual a la suma de las diferencias entre la media aritmética y los valores más pequeños. En este sentido, es un valor central. La media es la distancia de un tablón desde el extremo a un pivote colocado allí y que perfectamente equilibraría el tablón. La media aritmética es una estadística. Esta resume el conjunto de valores en nuestra colección de datos eso la hace importante.

La mediana equilibra el conjunto de otra manera, es el valor tal que la mitad de los números en el conjunto de datos son más grandes y la mitad son menores. Por ejemplo, colocamos los datos en forma creciente del ejemplo anterior 4,5,7,9,9,10;

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

la mediana es el promedio de los dos valores centrales =8.

$$\frac{x_3 + x_4}{2}$$

Si **n** es impar la mediana es el valor que ocupa la posición (n+1)/2

Si **n** es par la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

La **mediana** es un valor estadístico representativo distinto al valor de la media. Obviamente es más fácil de calcular que la media. Pero en realidad esta ventaja si usamos una computadora, se vuelve irrelevante dado que ella absorbe el tedio de realizar los procesos aritméticos. Para elegir la utilidad de la mediana o la media, dependerá de la precisión de detalle sobre la colección de datos que estemos buscando. Si queremos precisión de la medida central usamos la media.

La media y la mediana, no son los únicos dos resúmenes estadísticos, otro importante es la moda. Es el valor tomado con mayor frecuencia en una muestra. Por ejemplo para la colección de datos 4,5,7,9,9,10; la moda es 9.

Dispersión

Los promedios, como la media y la mediana, proporcionan un resumen estadístico de un solo número sobre la colección total de los datos. Son útiles porque nos dan los valores numéricos de una tendencia central. Pero esto nos puede ser engañoso, en particular estos valores individuales pueden diferir sustancialmente de los valores individuales en un conjunto de datos en términos de las distancias respecto a la centralidad media. Es decir, es necesario dar cuenta de lo disperso de los datos alrededor de la media. Los resúmenes estadísticos de dispersión proporcionan esta información. La medida de dispersión más simple es el rango.

El **rango** se define como la diferencia entre los valores mayor y menor del conjunto de datos. El rango tiene la propiedad de aportar información de la dispersión de los datos, de una manera muy sencilla. Sin embargo, se siente que no es muy ideal. Después de todo ignora la mayoría de los datos, no puede encontrar el hecho de dónde se encuentra la mayor densidad alrededor de la media. Es deficiencia se puede superar mediante el uso de una medida de dispersión que toma a todos los valores en cuenta.

Una forma de hacer esto, es tomar la diferencia entre la media aritmética y cada número del conjunto de datos al cuadrado y luego encontrar la media de estas diferencias cuadradas. Si la media resultante de las diferencias cuadradas es pequeña, nos dice que, en promedio los números son demasiado diferentes de su promedio. Es decir, ellos no son muy dispersos. Esta medida de la diferencia de cuadrados se llama varianza de los datos o desviación cuadrada media.

Una complicación surge del hecho de que la varianza implica al valor de el cuadrado de los datos. La varianza es una media de los valores cuadrado. Si medimos la productividad de páginas escritas, estamos hablando del promedio de páginas cuadradas. Es obvio que no hacemos esto. Debido a esta dificultad, es común tomar la raíz cuadrada de la varianza. Esto cambia las unidades, a las unidades originales y produce la media de dispersión llamada desviación estándar. La media se le suele conocer también como esperanza matemática, es el valor medio esperado E.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$ Varianza

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$ Desviación estándar

La desviación estándar supera el problema que identificamos con el rango, al emplear todos los datos. Esta desviación típica, si la mayoría de los datos están agrupados muy cerca, con pocos periféricos, se reconocerán por la desviación estándar pequeña. Por contrario, si los datos toman valores muy lejanos de la esperanza matemática, la desviación estándar será mucho mayor su valor.

Oblicuidad

Si bien las medidas de dispersión nos dicen cuánto se desvían los valores individuales de datos unos de otros. Pero no nos dicen de qué manera se desvían. En particular, no nos dicen si las desviaciones más grandes tienden a ser los valores más grandes o los valores más pequeños del conjunto de datos. Para detectar esta diferencia, necesitamos de otro resumen estadístico, uno que recoge y mida la asimetría en la distribución de valores de los datos. Un tipo de asimetría de valores se llama **sesgo**. Las distribuciones sesgadas son muy comunes. Un ejemplo clásico es la distribución de la riqueza en la sociedad, en la que la mayoría de las personas esta en valores pequeños y unos cuantos en valores mayores de riqueza. Es justo por lo dispar de los sueldos. El sesgo es un estimador entre la diferencia de su media y el valor numérico del parámetro que se estima dentro de un conjunto de datos.

Referencias

[1] http://www.periodismoull.es/las-matematicas-nos-ayudan-a-ser-mejores-ciudadanos/

[2] Shneidman, L., & Woodward, A. L. (2016). *Are child-directed interactions the cradle of social learning. Psychol Bull*, *142*(1), 1-17. doi:10.1037/bul0000023

[3] http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/Equations-and-Inequalities-Making-Mathematics-Accessible-to-All-Spain-ESP.pdf

[4] http://es.unesco.org/world-education-forum-2015/

[5] Tall, D. (2004). *The three worlds of mathematics.* For the Learning of Mathematics, 23(3), 29–33.

[6] Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning.* In D. Holton (Ed.), The teaching

[7] Tall, D. O. (2008). *The transition to formal thinking in mathematics.* Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5–24.

[8] González-Martín, A.-S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & MMaschietto, M. (2014). *Didactic situations*

and didactical engineering in university mathematics: Cases from the study of calculus and proof. Research in Mathematics Education, 16(2), 117–134.

[9] Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). *Exploring young students' functional thinking.* PNA, 7(2), 75–84.

[10] NARDI E. 2007. *Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level (Mathematics Teacher Education)*. Springer.

[11] Einstein, A. (1931). *Cosmic religion: With other opinions and aphorisms.* New York: Covici-Friede.

[12] Allchin, D. (2003). *Scientific myth-conceptions.* Science Education, 87, 329–351

[13] Cruz, S. J. I. D. L. (2012). *Obras completas, I. Lírica personal: 1* (Spanish Edition)., 557.

[14] GARRIDO F. (2014). *El buen lector se hace, no nace. Reflexiones sobre la lectura y la escritura (Spanish Edition)*. Paidos.

[15] OCDE (2000). *Conocimientos y aptitudes para al vida.* Resultados de PISA 2000. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/39817007.pdf

[16] Alfonso Reyes (1983). *La experiencia literaria.* FCE: México.

[17] Yuri Dombrovsky (2015). *La facultada las cosa inútiles.* Sexto Piso: México.

[18] Kjærulff, U. B., & Madsen, A. L. (2012). *Bayesian Networks and Influence Diagrams: A Guide to Construction and Analysis (Information Science and Statistics)* (2nd ed. 2013 ed.). Springer.

[19] LaSalle, J. P. (1974). *The Influence of Computing on Mathematical Research and Education (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics)*. Amer Mathematical Society.

[20] Marsden, S. S. A. J. E., Wiggins, L. S. S., Glass, L., Kohn, R. V., & Sastry, S. S. (1993). *Interdisciplinary Applied Mathematics.* Retrieved from http://tocs.ulb.tu-darmstadt.de/111125987.pdf

[21] HALMOS P.R. (1988). *I Want to Be a Mathematician: An Automathography in Three Parts (Maa Spectrum Series)*. Mathematical Association of America (MAA).

[22] Ore Oystein (1976). *Number Theory and its History*. New York: Dover Publications.

[23] Dehaene Stanislas (2011). *The numbers sense.* New York: Oxford University Press.

[24] Gobson, J. J. (I950). *The Perception of the Visual World*. Cambridge: Mass.

[25] Teresa Lucca, Ana M. (2013). *Blog de matemáticas y TIC'S.* Recuperado de https://matematics.wordpress.com/2013/12/09/rafael-bombelli/

[26] Penrose Roger (2007). *El camino a la realidad.* Barcelona: DEBATE.

[27] Conway, J. H. & Guy, R. K. (1996). *Euler's Wonderful Relation.* The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag

[28] Wohlgemuth Andrew (2011). *Introducción to proof in abstract mathematics.* Philadelphia: Dover

[29] Gerstein Larry J. (2012). *Introduction to mathematical structures abd Proofs.* New York: Springer.

[30] Corry, Leo (2003). *David Hilbert y su filosofía empirista de la geometría.* Universidad de Tel Aviv. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Hilbert%20USB.pdf

[31] CORRAL F.D.D. (2008). *Blaise Pascal La Certeza y La Duda (Spanish Edition)*. Visionnet Ediciones.

[32] FEYNMAN M., FEYNMAN C. & FEYNMAN R. (2016). *Richard P. Feynman. La física de las palabras: Reflexiones y pensamientos de uno de los científicos más influyentes del s. XX* (Spanish Edition). 410.

[33] DROŻDŻ S., OŚWIĘCIMKA P., KULIG A., KWAPIEŃ J., BAZARNIK K., GRABSKA-GRADZIŃSKA I., RYBICKI J. & STANUSZEK M. 2016. Quantifying origin and character of long-range correlations in narrative texts. *Information Sciences* 331: 32-44.

[34] Clifford A. Pickover (**2012**) El libro de las matemáticas. Nueva York: Sterling Publishing

[35] Foto tomada de Internet en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/PictDisplay/Hilbert.html

[36] Ivor Grattan.Guinness (**2000**) A sideways Look at hilbert's twenty-three problems of 1900. Nitices of the AMS Vol 47(7) pp. 752-757. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://www.ams.org/notices/200007/fea-grattan.pdf

[37] Giorgio Israel, Marta Menghini (**1989**) The "Essential Tension" at Work in Qualitative Analysis: A Case Study of the Opposite Points of View of Poincaré and Enriques on the Relationships between Analysis and Geometry. Historia Mathematica, Volume 25, Issue 4, November 1998, Pages 379-411. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://www.sciencedirect.com

[38] Reale Giovanni & Antiseri Dario (**2005**) Historia del pensamiento filosófico y científico. Barcelona: Herder.

[39] G. Donald Allen. Lectures on the history of mathematics: The History of infinity. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://www.math.tamu.edu/%7Edallen/masters/index.htm

[40] Torres A., Carlos (**1989**) La filosofía y el programa de Hilbert. MATHESIS vol. V(1). pp. 33-55. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://132.248.9.1:8991/hevila/e-BIBLAT/CLASE/cla104285.pdf

[41] Corry, Leo (**2003**) David Hilbert y su filosofía empirista de al geometría. Universidad de Tel Aviv. Consulta 11 de noviembre de 2012, de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Hilbert%20USB.pdf

[42] Free access to archived articles of primary mathematics journals
http://www.elsevier.com/wps/find/P11.cws_home/archivedjournals

[43] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk

[44] Schmandt-Besserat, Denise (**1998**) Animal Symbols at "Ain Ghazal. Expedition 39(1):48-58

[45] Martos, Quesada, J. (**2001**) Los estudios sobre el desarrollo de las matemáticas en al-Andalus: estado actual de la cuestión. DYNAMIS 21:269-293. Consultado: 23 de Febrero de 2013, de www.raco.cat/index.php/Dynamis/article/download/92578/117793

[46] Wussing H. (**1998**) Lecciones de historia de las matemáticas. Madrid: Siglo XXI

[47] Greenberg, M. J. (**1994**) Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, San

Francisco, CA: W. H. Freeman.

[48] Gourdon, X. and Sebah, P. "Pythagore's Constant: ." Consultado: 23 de Febrero de 2013. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html

[49] MathPages. "Number Theory." Consultado: 23 de Febrero de 2013. http://www.mathpages.com/home/inumber.htm

[50] Ramanujan, S. (**1963**) "Modular Equations and Approximations to pi." Quart. J. Pure. Appl. Math. 45, 350-372, 1913-1914.

[51] A-BAK'2013 el sol del nuevo B'aktun. Consultado: 23 de Febrero de 2013, de http://abakmatematicamaya.blogspot.mx/2010/04/bak-matematica-maya-el-cero-maya.html

[52] Estévez Delgado, G. & Ochoa H., E. (**2001**) El origen del cero. Morelia: UMSNH. Consultado: 23 de Febrero de 2013, de http://dieumsnh.qfb.umich.mx/matematicas/cero.htm

[53] Díaz, D., Ruy (**2001**) Adquisición de la noción de número natural. Rev. Iberoamericana de la educación 49:5-25. Consultado: 23 de Febrero de 2013, de http://www.rieoei.org/deloslectores/2618Diaz.pdf

[54] Gelmam, Rochel (**2004**) Languaje and the origien of numerical concepts. Science 306(5695):441-443. Consultado: 23 de Febrero de 2013, de http://ruccs.rutgers.edu/~rgelman/index.html

[55] Albujer Brotons, Alma Luisa (**2009**) Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos. Murcia: Universidad de Murcia. Consultado: 24 de Febrero de 2013, de http://digitum.um.es/xmlui/bitstream/10201/3263/1/AlbujerBrotons.pdf

[56] Méndez, R., Juan (**2008**) Agujeros de gusano rotante con materia escalr tipo phantom. CINVESTAV. Consultado: 24 de Febrero de 2013, de http://pelusa.fis.cinvestav.mx/tmatos/LaSumA/3_RecursosH/MenC/Juan_Mendez.pdf

[57] Martin E., George (**1991**) The Foundations of geometry and the non-euclidean plane. Springer. Consultado: 24 de Febrero de 2013, de E-Book

[58] Polking C., John (**1996**)The Geometry of the sphere. Rice University Consultado: 24 de Febrero de 2013, de http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/#intro

[59] Hopf, H. "Selected Chapters of Geometry (**1940**) ETH Zürich lecture, pp. 1-2. Consultado: 24 de Febrero de 2013, de http://www.math.cornell.edu/~hatcher/Other/hopf-samelson.pdf

[60] Bell, E. T. (**1992**) The Development of Mathematics, New York: McGraw-Hill, p. 340.

[61] Charatonik, J. J. and Prajs, J. R.(**2001**) On Local Connectedness of Absolute Retracts. Pacific J. Math. 201: 83-88.

[62] Altshiller-Court, N.(**1979**) Modern Pure Solid Geometry. New York: Chelsea.

[63] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669802001191

[64] https://cage.ugent.be/geometry/Theses/19/ekuijken.pdf

[65] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316582900061

[66] Ehrig, H., & Mahr, B. (1985). *Fundamentals of Algebraic Specification 1: Equations and Initial Semantics (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)* (Softcover reprint of the original 1st ed. 1985 ed.). Springer.

[67] Ehrig, H., Ehrig, K., Prange, U., & Taentzer, G. (2009). *Fundamentals of Algebraic Graph Transformation (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)* (Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2006 ed.). Springer.

[68] Stevin, S., Alexandria, D. O., & Girard, A. (2013). *L'Arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges - Primary Source Edition (French Edition)*. Nabu Press.

[69] H*ORMANN, J. O. S. E. (1956). UEBER JACOB BERNOULLIS BEITRAGE ZUR INFINITESIMALMATHEMATIK (MONOGRAPHIES DE L'ENSEIGNMENT MATHEMATIQUE NO. 3). INSTITUT DE MATHEMATIQUES; UNIVERSITE, GENEVE.*