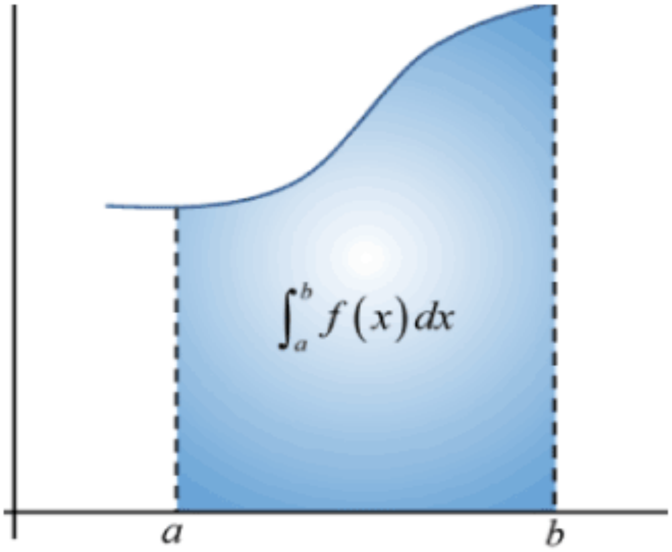
2020

La integral



Eduardo Ochoa Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán
Nicolás Zamudio Hernández

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

La Integral

Técnicas y métodos

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán

Morelia. Michoacán. Marzo de 2020

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Coordinación de Innovación Educativa CIE/QFB

PRESENTA:

La Integral

Técnicas y métodos

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán

Título original de la obra:

Ochoa H. E., Borjas G. F.E., et al (2020) ***La Integral: Técnica y Método***. Morelia: CIE/QFB

Tzintzuntzán No. 173 Col. Matamoros C.P. 58240, Edificio E planta alta Morelia, Michoacán. México. MX
Teléfono (443) 3-14-28-09. Email: eohqfb@yahoo.com.mx

ISBN: 978-607-8416-12-7

9 786078 416127

ISBN: 978-607-8416-12-7

Programa: Profesor escritor.

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Directorio

Dr. Raúl Cárdenas Navarro
Rector

L.E. Pedro Mata Vázquez
Secretario General

Dr. Orépani García Rodríguez
Secretario Académico

ME en M.F. Silvia Hernández Capi
Secretaria Administrativa

Dr. Juan Carlos Gómez Revuelta
Secretario Auxiliar

Dr. Rodrigo Gómez Monge
Tesorero

Dr. Héctor Pérez Pintor
Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Lic. Luis Fernando Rodríguez Vera
Abogado General

Mtro. Rodrigo Tavera Ochoa
Contralor

Dr. Marco Antonio Landavazo Arias
Coordinador de la Investigación Científica

Contenido

Prefacio

El cálculo es la primer gran fusión de las grandes culturas de la historia, con él nace la globalización. Egipcios, Mesopotamicos, Mayas, Europeos y Griegos. Creación enorme de la mente humana. Estas ideas de mónadas, infinitos, ceros, círculos, curvas, límites y funciones; sin duda alguna impulsaron la tecnología del siglo XVII. Sus arquitectos Gottfried Wihelm Leibniz (1646-1716 Alemania) y Isaac Newton (1642-1727 Inglaterra) recogieron las piezas matemáticas desde la profunda historia humana y con ellas sentaran las bases de cálculo exacto moderno. Aunque lo exacto de este cálculo fue demostró tempo después por Joseph-Luis Lagrange (1736-1813 Italiano) aplicando un método algebraico. El conocimiento profundo del movimiento físico de estrellas y planetas solo fue el comienzo de los logros de este cálculo, pero rápidamente se convierte en el análisis mecánico, químico y recientemente biológico de las ciencias modernas. Pero este formidable conocimiento matemático se extendería a el álgebra y la geometría aumentando su poder de análisis de la formulación precisa de variación en las tasas de cambio, en la abstracción de infinitesimales y proporciono las herramientas para construir, diseñar y hacer predicciones sobre procesos de gravedad, electromagnetismo, reacciones químicas y proceso bioquímicos; pero siempre históricamente ligado a las ciencias físicas. Recientemente este cálculo irrumpe con fuerza para modificar los modos de comprender la economía, las finanzas, las gestiones de la administración y la psicología, conforme se volvieron más cuantitativas. Por ello, la educación Superior y Media superior lo refieren como parámetro de calidad de la educación, por el claro interés en acelerar la cultura de la alta tecnología y los procesos industriales de automatización.

Pero la docencia lamentablemente no a podido incorporar el discurso del cálculo infinitesimal con suficiente precisión en el léxico de las nuevas generaciones. Los conceptos que son piezas fundamentales para su comprensión son muy poco explorados y discutidos, tales como, cero infinito, variable, circulo, curva, función, espacio geométrico, punto dimensional, tasas de cambio, límite, rectas tangentes, polígono regular de n número de lados, cociente 0/0, entre otros. Esta razón hace necesario estudiar e investigar para comprender la noción de Límite. Realizar ejemplo sobre polinomios algebraicos, funciones racionales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, y así sucesivamente. Consiste en resolver los límites empleando procedimientos algebraicos que eliminen la indefinición de la molesta división sobre cero del denominador. Ya en el siglo XIX los matemáticos introducen un descripción de técnicas para agilizar los cálculos de los límites. Desde entonces estos teoremas se conocen como formulas de derivación e integración. Pero en el siglo XX en particular el cálculo se volvió con ayuda de la informática en un análisis numérico asistido por computadora. Ya en el siglo XXI estos conceptos abstractos siguen siendo un reto para cualquier persona que quiere aprender y entender como es que la tecnología moderna logro tal exactitud y precisión para explorar la realidad y hacer de nuestra vidas un viaje emocionante. Una vez resulte que este cálculo no es de aproximación, sino es exacto, estas nueva idea abre la puerta a resolver problemas de la función exponencial y haber la necesidad de incorporar los números complejos, la variable y las funciones complejas; así nace el análisis de derivación e integración compleja.

Este libro, explora con coherencia y precisión las técnicas de integración de funciones por métodos no numéricos. Aprender estas matemáticas es:

- Encontrar el tema central de un concepto matemático.
- Expandir sus propiedades y aplicaciones.
- Explorar la relación de sus propiedades con otras áreas de la matemática.

En esta etapa, es muy importante recordar (por adelantado) y entender claramente que mientras el tema del cálculo exige del conocimiento del álgebra, geometría, coordenadas geométricas y trigonometría, y así sucesivamente (como requisito previo). Por lo tanto, el cálculo no debe confundirse como una combinación de estas ramas. El cálculo es un tema diferente. La columna vertebral de cálculo es el "concepto de límite de una tendencia al cero Maya“, el cual es presentado y discutido en el curso de cálculo diferencial. De hecho, allí el término técnico para la "pendiente" es generado en forma de función de pendientes.

La mayor parte de los desarrollos en el campo de varias ciencias y tecnologías se deben las ideas desarrolladas con la derivada y cálculo de primitivas (también llamados integrales). El cálculo integral es considerado como el proceso inverso del cálculo diferencial.

Este libro es un viaje por las técnicas de integración paso a paso, incorpora una gama y variedad de ejemplos que le permitirán dominar este conocimiento de las mónadas.

Técnicas de integración

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+3x+4}} = I$$

$$2x^2+3x+4 = 2\left[x^2+\frac{3}{2}x+2\right]$$

$$= 2\left[x^2+2\left(\frac{3}{4}\right)x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\right]$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2\right]$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+(3/4))^2-(\sqrt{23}/2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{(x+(3/4))^2-(\sqrt{23}/4)^2}\right]+c$$

$$= \frac{1}{}\log\left[\left(x+\frac{3}{}\right)+\sqrt{x^2+\frac{3}{}x+2}\right]+c$$

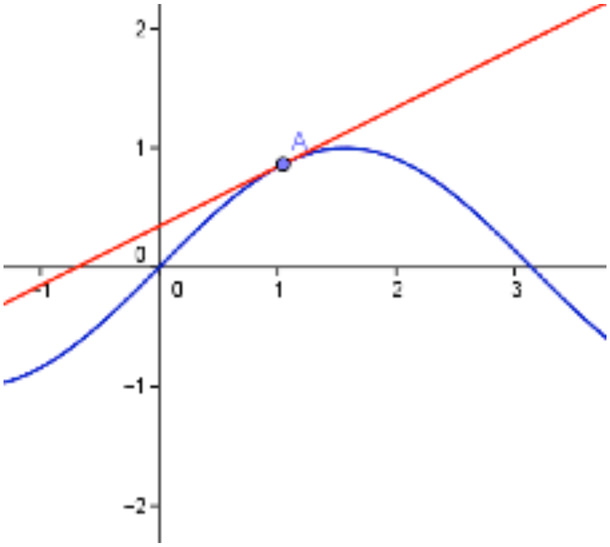
1.1. Introducción

Una de las ramas de las matemáticas es el cálculo, para su estudio generalmente se divide en dos partes, denominada, cálculo diferencial y cálculo integral. El presente trabajo está enfocado al cálculo integral y particularmente a las técnicas de integración.

Es interesante conocer aspectos históricos o antecedentes, porque nos brinda un contexto que permite comprender y entender cómo llegamos a los conceptos actuales, por lo que a continuación mencionaremos algunos aspectos que llevaron al desarrollo actual del cálculo integral.

El término cálculo se remonta a épocas antiguas, cuando el hombre primitivo tuvo la necesidad de llevar a cabo la acción de contar, de ahí que, cálculo del latín *calculus*, hacía referencia a pequeñas piedras que servían como herramienta para llevar a cabo el proceso de contar y dieron comienzo al[1] desarrollo[2] de[3] las[4] matemáticas[5].

El significado de cálculo ha evolucionado con el paso del tiempo, actualmente considerado un campo de las matemáticas que hace referencia a dos conceptos relacionados: las derivadas y las integrales[2].



El *cálculo diferencial* tiene como objeto de estudio, la derivada, concepto que permite analizar razones de cambio y determinar rectas tangentes a curvas de[6] funciones[7].

Por su parte, el *cálculo integral* tiene como objeto de estudio, la integral, concepto que permite recuperar funciones de las cuales se conocen sus razones de cambio, así como la determinación de longitudes de curvas, áreas planas y volúmenes, entre otros[6,7].

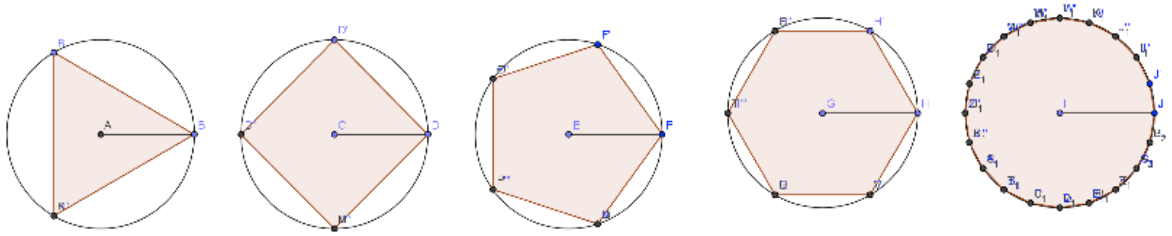
El cálculo en nuestra época es considerado como una herramienta matemática de análisis y modelación, que se aplica en diferentes áreas del conocimiento como física, química, biología, economía e ingeniería entre otras[8].

Es en la Grecia antigua donde tiene origen el cálculo integral, se les atribuye ser los primeros en llevar a cabo la idea de dividir un cuerpo en partes más simples, los problemas fundamentales que plantearon dieron pauta al desarrollo del cálculo[9] y fueron[10]:

- Obtener[11] el área bajo una curva.
- Determinar la recta tangente a curvas, en un punto determinado.
- La velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento.
- Problemas de optimización, esto es, máximos y mínimos de una función.

El problema del cálculo de áreas es el antecedente histórico del cálculo integral. Los griegos Eudoxus (390-337a.C.) y posteriormente Arquímedes (287-212 a.C.), utilizaron un procedimiento para calcular áreas denominado método del agotamiento, también conocido como método de eliminaciones sucesivas o método exhaustivo.

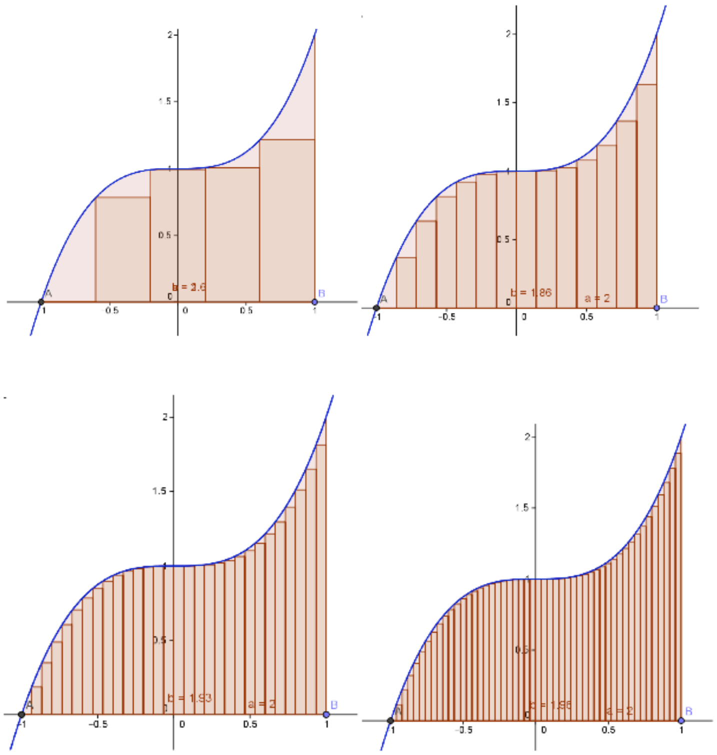
Este método es de aproximación geométrica, aplica el principio de la subdivisión infinita. Para calcular el área de una curva, el método consistía en inscribir polígonos dentro de la figura, y circunscribir polígonos fuera de ella; después aumentar el número de lados de los polígonos, como se muestra en las siguientes figuras[12]:



Si se considera que A_n representa el área del polígono inscrito con n lados, se aprecia que conforme aumenta el número de lados, el área A_n se aproxima cada vez más y más al área del círculo, es por ello que se dice que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos. Matemáticamente, se escribe:

$$\acute{A}rea = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Este concepto es similar al cálculo de áreas bajo una curva, utilizado en cálculo integral, como se observa en las figuras siguientes:



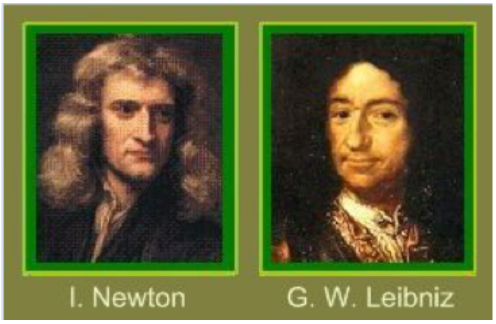
Para obtener el área bajo la curva, en un intervalo dado (a, b) se realiza una aproximación, sumando las áreas de los rectángulos, conforme se va reduciendo la base de dichos rectángulos, el límite de las sumas de las áreas de cada rectángulo se acerca al valor del área deseada, matemáticamente:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

El símbolo ∫ (una s alargada) representa a la integral, se lee la integral de, fue Leibniz quien lo introdujo en el año 1675[13].

La integral no solo permite calcular áreas, también es utilizada para calcular longitudes de curvas, volúmenes, trabajo realizado por una fuerza variable, centros de gravedad, probabilidades, etcétera.

Personajes que a lo largo de la historia han contribuido con el desarrollo del cálculo son varios, destacan: Eudoxus (390-337 a.C.), Arquímedes (287-212 a. C.), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Johannes Kepler (1571-1630), John Wallis (1616-1703), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat(1601-1665), e Isaac Barrow (1630-1677)[11].



Se considera a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) los creadores del cálculo, ya que en el siglo XVII, fueron los que de forma independiente sintetizaron los resultados y métodos previamente desarrollados por sus[14] antecesores[15].

En la frase famosa de Newton: "*Si he visto más lejos que otros hombres, es porque me he subido en los hombros de gigantes*". Se cree que hacía referencia a dos grandes matemáticos: Pierre Fermat e Isaac Borrow (profesor de Newton)[12].

Personajes posteriores a Newton y Leibniz continuaron el desarrollo del cálculo, en el siglo XVII, Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813), en el siglo XIX destacan, Agustín Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) y Karl Weierstrass (1815-1897); y en el siglo XX Henri Lebesgue (1875-1941) y Abraham Robinson (1918-1974)[14].

El cálculo en matemáticas ha sido una de las creaciones más grande de la humanidad, considerado hoy, una herramienta poderosa en prácticamente cualquier campo del conocimiento. Gracias al cálculo, el mundo ha cambiado y avanzado a grandes pasos.

1.2. Derivación por fórmulas

Para comprender las técnicas de integración, es esencial que se tenga habilidad en el proceso derivativo de funciones.

Recordemos que la derivada representa, desde el punto de vista geométrico, la pendiente de la recta tangente de una curva en un determinado punto. Y desde el punto de vista físico, la razón de cambio de una cantidad respecto a otra[16].

A continuación se hace mención de las fórmulas que permiten derivar funciones algebraicas y trascendentes, donde las literales $\boldsymbol{u, v\, y\, w}$ son consideradas funciones derivables de la variable $\boldsymbol{x}$**,** y la literal $\boldsymbol{c}$ es considerada una constante[17].

Tabla 1. Fórmulas para derivar funciones algebraicas

1. $\frac{d}{dx}c = 0$

2. $\frac{d}{dx}x = 1$

3. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v - \frac{d}{dx}w$

4. $\frac{d}{dx}cv = c\frac{d}{dx}v$

5. $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{d}{dx}v$

6. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

7. $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{v} = \frac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\frac{d}{dx}v$

8. $\frac{d}{dx}\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{d}{dx}v$

9. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$

10. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c}{v^2}\frac{d}{dx}v$

12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}v$

13. $\frac{d}{dx} = \frac{dydv}{dvdx}\ y\ es\ función\ de\ v$

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \pi$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\pi = 0$$

2. $f(x) = x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}x = 1$$

3. $f(x) = 20x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(20x) = 20\frac{d}{dx}x = 20(1) = 20$$

4. $f(x) = \pi x - 15$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\pi x - 15) = \frac{d}{dx}(\pi x) - \frac{d}{dx}15 = \pi\frac{d}{dx}x - 0 = \pi$$

5. $f(x) = x^{10}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}x^{10} = 10x^{10-1} = 10x^{9}$$

6. $f(x) =- 3\sqrt{x}$

$$\frac{df}{dx} =- 3\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} =- 3\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right) =- 3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =- \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} =- \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

7. $f(x) = \left(5x^{3} - 16x + 2\right)^{2}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5x^{3} - 16x + 2\right)^{2} = 2\left(5x^{3} - 16x + 2\right)\frac{d}{dx}\left(5x^{3} - 16x + 2\right) =$$

$$\frac{df}{dx} = 2\left(5x^{3} - 16x + 2\right)\left(15x^{2} - 16\right)$$

8. $f(x) = \sqrt{x}\left(x^2 + 5\right)$

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(x^2 + 5\right) + \left(x^2 + 5\right)\frac{d}{dx}x^{1/2}$$

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{x}(2x) + \left(x^2 + 5\right)\left(\frac{1}{2}x^{-{}^{1}/_{2}}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = 2x\sqrt{x} + \left(x^2 + 5\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 5}{2\sqrt{x}}$$

9. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+3)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+3)(1) - (x-1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

10. Obtener la tercera derivada de $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 8$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 8x - 1$$

$$f^{''}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 8$$

$$f^{'''}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 6$$

Fórmulas para derivar funciones trascendentes

14. $\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1\,d}{v\,dx}v$

15. $\frac{d}{dx}\log v = \frac{\log e\;d}{v\;\;dx}v$

16. $\frac{d}{dx}a^{v} = a^{v}\ln a\frac{d}{dx}v$

17. $\frac{d}{dx}e^{v} = e^{v}\frac{d}{dx}v$

18. $\frac{d}{dx}u^{v} = vu^{v-1}\frac{d}{dx}u + \ln u \cdot u^{v}\frac{d}{dx}v$

19. $\frac{d}{dx}\text{sen } v = \cos v\frac{d}{dx}v$

20. $\frac{d}{dx}\cos v =- \text{sen } v\frac{d}{dx}v$

21. $\frac{d}{dx}\tan v = sec^{\,2} v\frac{d}{dx}v$

22. $\frac{d}{dx}\cot v =- csc^{2} v\frac{d}{dx}v$

23. $\frac{d}{dx}\sec v = \sec v \cdot \tan v\frac{d}{dx}v$

24. $\frac{d}{dx}\csc v =- \csc v \cdot \cot v\frac{d}{dx}v$

25. $\frac{d}{dx}arc\text{sen } v = \frac{1\quad d}{\sqrt{1-v^{2}}\,dx}v$

26. $\frac{d}{dx}arc\cos v =- \frac{1\quad d}{\sqrt{1-v^{2}}\,dx}v$

27. $\frac{d}{dx}arc\tan v = \frac{1\quad d}{1+v^{2}\,dx}v$

28. $\frac{d}{dx}arc\cot v =- \frac{1\quad d}{1+v^{2}\,dx}v$

29. $\frac{d}{dx}arc\sec v = \frac{1\quad d}{v\sqrt{v^{2}-1}\,dx}v$

30. $\frac{d}{dx}arccsc\, v =- \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{d}{dx}v$

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

11. $f(x) = \ln\ (x^2 + k)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{(x^2+k)}\frac{d}{dx}(x^2+k) = \frac{1}{(x^2+k)}(2x) = \frac{2x}{(x^2+k)}$$

12. $f(x) = 5^{3x}$

$$\frac{df}{dx} = 5^{3x}\ln 5\frac{d}{dx}(3x) = 5^{3x}\ln 5(3) = 3(5^{3x})\ln 5$$

13. $f(x) = e^{5x^2}$

$$\frac{df}{dx} = e^{5x^2}\frac{d}{dx}(5x^2) = e^{5x^2}(10x) = 10xe^{5x^2}$$

14. $f(x) = \text{sen}\ (x^2)$

$$\frac{df}{dx} = \cos\ (x^2)\frac{d}{dx}x^2 = \cos\ (x^2)(2x) = 2x\cos\ (x^2)$$

15. $f(x) = \cos\ (7x^3)$

$$\frac{df}{dx} =- sen\ (7x^3)\frac{d}{dx}(7x^3) =- sen\ (7x^3)(21x^2) =- 21x^2sen\ (7x^3)$$

16. $f(x) = \tan\ (x^3 - x^2)$

$$\frac{df}{dx} = sec^2(x^3 - x^2)\frac{d}{dx}(x^3 - x^2) = sec^2(x^3 - x^2)(3x^2 - 2x)$$

$$\frac{df}{dx} = (3x^2 - 2x)sec^2(x^3 - x^2)$$

17. $f(x) = \sec\left(e^{mx}\right)$

$$\frac{df}{dx} = \sec\left(e^{mx}\right)\tan\left(e^{mx}\right)\frac{d}{dx}e^{mx} = \sec\left(e^{mx}\right)\tan\left(e^{mx}\right)\left(me^{mx}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = me^{mx}\sec\left(e^{mx}\right)\tan\left(e^{mx}\right)$$

18. $f(x) = arc\ sen\ (\pi x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(\pi x)}{\sqrt{1 - (\pi x)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \pi^2 x^2}}$$

19. $f(x) = 9x^4 sen\ (4x)$

$$\frac{df}{dx} = 9x^4\frac{d}{dx}sen(4x) + sen(4x)\frac{d}{dx}\left(9x^4\right)$$

$$\frac{df}{dx} = 9x^4(4\cos 4x) + sen(4x)\left(36x^3\right)$$

$$\frac{df}{dx} = 36x^4\cos 4x + 36x^3 sen4x$$

20. Obtener la segunda derivada de $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

$$f^{'}(x) = \frac{x\frac{d}{dx}\tan x - \tan x\frac{d}{dx}x}{x^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x\left(sec^2 x\right) - \tan x}{x^2}$$

Derivando nuevamente:

$$f^{''}(x) = \frac{x^2\frac{d}{dx}\left[x\left(sec^2 x\right) - \tan x\right] - \left[xsec^2 x - tanx\right]\frac{d}{dx}x^2}{\left(x^2\right)^2}$$

Determinando previamente la derivada de $\frac{d}{dx}\left[x\,sec^2x - \tan x\right]$

$$x\frac{d}{dx}sec^2x + sec^2x\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}\tan x$$

$$x\left(2\sec x\frac{d}{dx}secx\right) + sec^2x - sec^2x$$

$$x(2\sec x)(\sec x\tan x) = 2xsec^2x\;tanx$$

Por lo que ahora tenemos:

$$f^{''}(x) = \frac{x^2\left(2xsec^2x\;tanx\right) - \left[xsec^2x - tanx\right](2x)}{x^4}$$

$$f^{''}(x) = \frac{x^2\left(2xsec^2x\tan x\right) - 2x^2sec^2x + 2xtanx}{x^4}$$

Compruebe que aplicando identidades trigonométricas, el resultado puede ser expresado como:

$$f^{''}(x) = \frac{2x\;tan^3x - 2x\;tan^2x + 2x^2\tan x + 2\tan x - 2x}{x^3}$$

1.3. La integral

El proceso de integración representa la operación inversa al proceso de derivación de funciones. Esto quiere decir, que si se tiene una función dada $\boldsymbol{f(x)}$ la integración permite obtener otra función $\boldsymbol{F(x)}$ tal que al derivarla se recupera $\boldsymbol{f(x)}$, es decir:

Si $\int f(x)dx = F(x)$ entonces se tiene $F^{'}(x) = f(x)$

El símbolo que se utiliza para representar el proceso de integración, es una "s" alargada ∫, a la función $f(x)$, se le denomina integrando y dx nos indica la variable de integración, en este caso, x.

Supóngase que se tiene la función $f(x) = 2x$; al integrar esta función se obtiene otra función $F(x) = x^2$ de manera que si se deriva se recupera la función inicial.

$$\frac{d}{dx}F(x) = F^{'}(x) = 2x \ .$$

Así mismo, si se tiene la función $f(x) = \cos x$, al integrar se obtiene la función $F(x) = sen\,x$, de acuerdo con las reglas de derivación, se ve que al derivar recuperamos la función original

$$\frac{d}{dx}F(x) = F^{'}(x) = \cos x$$

Estos ejemplos manifiestan el carácter inverso que se da entre los procesos de derivación e integración de funciones.

A la función $F(x)$ se le conoce como primitiva de $\boldsymbol{f(x)}$.

Se hace la observación de que la primitiva de una función no es única, es decir, para la función dada, existe una infinidad de primitivas que difieren en una constante[18].

Las siguientes funciones son también primitivas de la función $f(x) = 2x$:

$F(x) = x^2$

$G(x) = x^2 + 1$

$H(x) = x^2 + 20$

$I(x) = x^2 - 5$

Al derivar cada una de ellas, se recupera la función original.

$$\frac{d}{dx}F = \frac{d}{dx}G = \frac{d}{dx}H = \frac{d}{dx}I = 2x$$

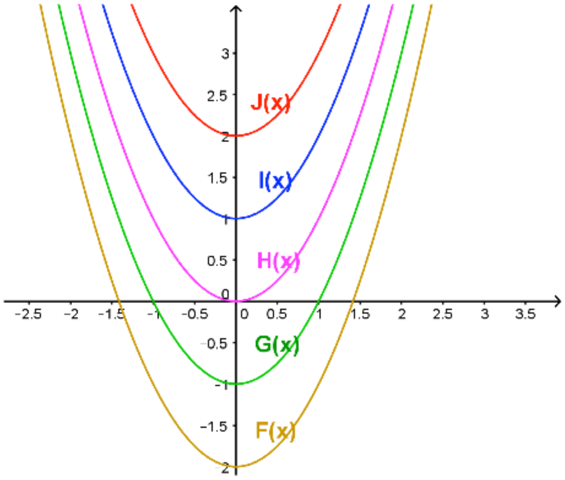
Al conjunto de todas las primitivas de una función dada $f(x)$, se le denomina integral indefinida de $f(x)$, lo cual se escribe[18,19]:

$$\int f(x) = F(x) + C$$

Donde C es una constante cualquiera y recibe el nombre de constante de integración.

Geométricamente la integral indefinida representa una familia de gráficas, las cuales se encuentran desplazadas paralelamente a una gráfica, en sentido positivo o negativo en el eje Y.

El valor particular de la constante de integración c, define una curva particular de la familia de primitivas.



Se ha comentado que algunas primitivas de la función $f(x) = 2x$, son:

$J(x) = x^2 + 2$

$I(x) = x^2 + 1$

$H(x) = x^2$

$G(x) = x^2 - 1$

$F(x) = x^2 - 2$

La figura muestra la gráfica de estas funciones, son parábolas desplazadas en el eje Y.

1.4. Integración inmediata

Leibniz introdujo la convención de escribir la diferencial de una función después de la integral, la ventaja de utilizar el diferencial de esta manera será evidente para el lector más tarde, cuando calculamos primitivas por el método de sustitución que se estudiará más adelante. Debido a ciertas dificultades prácticas, no es posible formular un conjunto de reglas por las cuales cualquier función puede ser integrado. Sin embargo, ciertos métodos se han ideado para integra ciertos tipos de funciones.

- El conocimiento de estos métodos,
- Buena comprensión de fórmulas de derivación, y

- La práctica necesaria, debería ayudar a los estudiantes integrar la mayoría de lo que ocurren comúnmente para las funciones.

Los métodos de integración, en general, consisten en ciertas operaciones matemáticas aplicada a el integrando de manera que asume una cierta forma (s) conocido de que las integrales son conocidos. Siempre que es posible expresar el integrando en cualquiera de las formas conocidas (que llamamos formas estándar), la solución final se convierte en una cuestión de reconocimiento e inspección.

Partiendo del carácter inverso de la integración respecto a la derivación, contamos con una serie básica de fórmulas, que permiten obtener la integral de diferentes funciones[19].

Tabla 1.2. Fórmulas de integración

1. $\int 0\, dx = k$ donde k es una constante

2. $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)dx$

3. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

4. $\int dx = x + C$

5. $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \;\; donde\; n \neq - 1$

6. $\int \frac{dv}{v} = \ln |x| + C$

7. $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$

8. $\int e^v dv = e^v + C$

9. $\int sen\, v\, dv = - \cos v + C$

10. $\int \cos v\, dv = sen\, v + C$

11. $\int sec^2\, v\, dv = \tan v + C$

12. $\int \csc^2 v\, dv = - \cot v + C$

13. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$

14. $\int \csc v \cot v\, dv = - \csc v + C$

15. $\int \tan v\, dv = - \ln \cos v + C = \ln \sec v + C$

16. $\int \cot v\, dv = \ln sen\, v + C$

17. $\int \sec v\, dv = \ln (\sec v + \tan v) + C$

18. $\int \csc v\, dv = \ln (\csc v - \cot v) + C$

19. $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctan \left(\frac{v}{a}\right) + C$

20. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{v - a}{v + a}\right) + C \qquad (v^2 > a^2)$

21. $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + v}{a - v}\right) + C \qquad (v^2 < a^2)$

22. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\ sen \left(\frac{v}{a}\right) + C$

23. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

24. $\int \sqrt{a^2 - v^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen \left(\frac{v}{a}\right) + C$

25. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

A continuación se muestran algunos ejemplos, donde se aplican estas fórmulas.

Hacemos dos comentarios acerca de la fórmula mencionada en la Tabla 1.2

Se pretende incluir el caso cuando n=0, es decir,

$$\int x^0\, dx = \int 1 dx = x + c$$

Puesto que no se especifica ningún intervalo, la conclusión se entiende que es válida para cualquier intervalo en el que se define x^n. En particular, si n<0, hay que excluir cualquier intervalo que contenga el origen.

En vista de lo anterior, la derivada de también $\log_e x$ debe ser considerada sólo para los valores positivos de x. Además, cuando escribimos $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + c$, hay que recordar que en esta igualdad la función 1/x se ha de considerar solamente para los valores positivos de x.

Hay algunos teoremas de diferenciación que tienen sus homólogos en la integración, son los teoremas que establecen las propiedades de "integrales indefinidas" y se puede probar fácilmente usando la definición de primitiva. Casi cada teorema se demostró con la ayuda de la diferenciación, subrayando así el concepto de diferenciación. Para integrar una función dada, necesitaremos estos teoremas de integración, además de las fórmulas.

En palabras, "una integral de la suma de dos funciones, es igual a la suma de las integrales de estas dos funciones ". La regla anterior se puede extender a la suma de un número finito de funciones. El resultado también es válido, si la suma es reemplazada por la diferencia. Por lo tanto la integración se puede extender a la suma o diferencia de un número finito de funciones.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ donde c es un número real.

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

1. $\int x^4 dx$

Aplicando (5)

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + C$$

2. $\int x^9 dx$

Aplicando (5)

$$\int x^9 dx = \frac{x^{9+1}}{9+1} + C = \frac{x^{10}}{10} + C$$

3. $\int x^{-5} dx$

Aplicando (5)

$$\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

4. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

Aplicando (5)

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

5. $\int \sqrt[3]{x} dx$

Expresar el radical en forma de exponente fraccionario y aplicar (5)

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

6. $\int 8x\,dx$

Aplicando (2) y (5)

$$\int 8x\,dx = 8\int x\,dx = 8\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + C = 8\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = 4x^2 + C$$

7. $\int x^{-1}dx$

Como el exponte es -1, aplicar (6)

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

8. $\int -5\sqrt{x}dx$

Aplicando (2) y (5) y expresar el radical como exponente fraccionario

$$\int -5\sqrt{x}dx =- 5\int x^{\frac{1}{2}}dx =- 5\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C =- 5\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C =$$

$$=- 5\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + C =- \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

9. $\int \frac{\pi}{x^2}dx$

Expresar la variable como numerador y aplicar (2) y (5)

$$\int \frac{\pi}{x^2}dx = \pi\int x^{-2}dx = \pi\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \pi\frac{x^{-1}}{-1} + C =- \frac{\pi}{x} + C$$

A partir de los siguientes ejercicios, la constante de integración se indicará hasta el resultado final.

10. $\int(4x^3 - 5x^2 - 2x + 9)dx$

Primeramente aplicar (3)

$$\int (4x^3 - 5x^2 - 2x + 9)dx = \int 4x^3dx - \int 5x^2dx - \int 2x\,dx + \int 9\,dx$$

Después se procede a aplicar (2), (5) y en la última integral (4)

$$= 4\int x^3dx - 5\int x^2dx - 2\int x\,dx + 9\int dx$$

$$= 4\frac{x^{3+1}}{3+1} - 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + 9x$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 9x$$

$$= x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 9x$$

Obteniendo el resultado:

$$\int (4x^3 - 5x^2 - 2x + 9)dx = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 9x + C$$

11. $\int\left(\frac{3x^6 + 7x^5 - x^3 + 11}{x^2}\right)dx$

$$\int\left(\frac{3x^6 + 7x^5 - x^3 + 11}{x^2}\right)dx = \int (3x^4 + 7x^3 - x + 11x^{-2})dx$$

$$= 3\int x^4dx + 7\int x^3dx - \int x\,dx + 11\int x^{-2\,dx}$$

$$= 3\frac{x^5}{5} + 7\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 11\frac{x^{-1}}{-1}$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{x}$$

Por lo tanto:

$$\int\left(\frac{3x^6 + 7x^5 - x^3 + 11}{x^2}\right) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{x} + C$$

Es importante hacer la observación que al utilizar las fórmulas descritas anteriormente, se debe tener completa la diferencial de la variable.

1.5. Integración mediante cambio de variable

Existen integrales que pueden resolverse realizando un cambio de variable. Se obtiene la diferencial de la variable, después se hace un despeje de la diferencial y se sustituye en la integral para expresarla en términos de la nueva variable.

Lo anterior se podrá simplificar utilizando las fórmulas:

5. $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \;\; donde\; n \neq -1$

6. $\int \frac{dv}{v} = \ln|x| + C$

Veamos algunos ejemplos para mostrar este método.

Cambio de variable

$$x \ = \ g\left(t\right) \ dx$$

$$dx \ = \ g'\left(t\right)dt$$

$$\int \ f\left(x\right) \ dx \ = \ \int f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right) \ dt$$

$$1)\int\left(x+9\right)^{9}dx \rightarrow \int u^{9}du = \frac{u^{10}}{10}+c \rightarrow \frac{\left(x+9\right)^{10}}{10}+c$$

$$u = x+9$$

$$du = dx$$

$$2)\int\sqrt[3]{(x^{2}+6)}\,2xdx \rightarrow \int\sqrt[3]{u}du \rightarrow \int u^{1/3}du = \frac{3u^{4/3}}{4}+C \rightarrow \frac{3(x^{2}+6)^{4/3}}{4}+C$$

$$u = x^{2}+6$$

$$du = 2xdx$$

$$3)\int(3x+1)^{7}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int(u)^{7}du = \frac{1}{3}*\frac{u^{8}}{8}+C \rightarrow \frac{(3x+1)^{8}}{24}+C$$

$$u = 3x+1$$

$$du = 3dx$$

$$4)\int e^{4x+6}dx \rightarrow \frac{1}{4}\int e^{u}du = \frac{e^{u}}{4}+C \rightarrow \frac{e^{4x+6}}{4}+C$$

$$u = 4x+6$$

$$du = 4dx$$

$$5)\int sen\left(3x+2\right)dx \rightarrow \frac{1}{3}\int sen\left(u\right)du = \frac{-\cos(u)}{3}+C \rightarrow \frac{-\cos(3x+2)}{3}+C$$

$$u = 3x+2$$

$$du = 3dx$$

$$6)\int\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3}+3}}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{3x^{2}}{\sqrt{x^{3}+3}}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{2}{3}\sqrt{u}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^{3}+4}+c$$

$$u = 3x^{3}+2$$

$$du = 3x^{2}dx$$

$$7)\int\frac{x^{2}dx}{x^{6}+1} \rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{3x^{2}dx}{(x^{3})^{2}+1} \rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{du}{u^{2}+1} = \frac{1}{3}[\frac{1}{1}*\arctan\frac{u}{1}]+C \rightarrow \frac{\arctan x^{3}}{3}+C$$

$$u = x^{3}$$

$$du = 3x^{2}dx$$

$$8)\int \frac{e^{4/x}}{x^2}dx \to \frac{1}{-4}\int e^u du = \frac{e^u}{-4}+C \to \frac{e^{4/x}}{-4}+C$$

$u = 4/x$

$du = -4/x^2\,dx$

$$9)\int \frac{(\arctan x)^2\,dx}{1+x^2} \to \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+C \to \frac{(\arctan x)^3}{3}+C$$

$u = (\arctan x)$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$10)\int \frac{sen(\ln x)dx}{x} \to \int sen(u)du = -\cos(u)+C \to -\cos(\ln x)+C$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx$

$$11)\int \frac{e^x - e^{-x}dx}{e^x + e^{-x}} \to \int \frac{du}{u} = \ln(u)+C \to \ln(e^x+e^{-x})+C$$

$u = e^x + e^{-x}$

$du = (e^x - e^{-x})dx$

$$12)\int \frac{dx}{1+25x^2} \to \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{1+(5x)^2} \to \frac{1}{5}\int \frac{du}{1+(u)^2} = \frac{1}{5}[\frac{1}{1}\arctan\frac{u}{1}]+C \to \frac{\arctan 5x}{5}+C$$

$u = 5x$

$du = 5dx$

$$13)\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx \to 2\int \frac{u*udu}{u^2+2} \to 2\int \frac{u^2}{u^2+2}du \quad div$$

$u = \sqrt{x} \quad \therefore \quad x = u^2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \therefore \quad dx = 2\sqrt{x}du = 2udu$

$$div \quad u^2+2\overline{)u^2}\ \ 1$$

$$-u^2-2$$

$$red \to -2$$

$$\therefore 2\int (1-\frac{2}{u^2+2})du \to 2\int du - 4\int \frac{du}{u^2+2} = 2u - \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$$

$$\therefore\ 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}+C$$

14) $\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}dt \rightarrow \int \frac{u-3(2u)}{u+1}du \rightarrow 2\int \frac{\left(u^2-3u\right)}{u+1}du \rightarrow 2\int (u-4+\frac{4}{u+1})\,du$

$u=\sqrt{t}$

$t=u^2$

$du=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$dt=2\sqrt{t}du=2udu$

$u+1\overline{)u^2-3u}=(u-4+\frac{4}{u+1})$

$=2\int(u-4+\frac{4}{u+1})du=2\int udu-8\int du+8\int\frac{du}{u+1}$

$=u^2-8u+8In(u+1)$

$=t-8\sqrt{t}+8In(\sqrt{t}+1)+c$

$$\begin{array}{r|l} & \quad u \;-\; 4 \\ \cline{2-2} u+1 & u^2 - 3u \\ & u^2 + u \\ \cline{2-2} & \quad -4u \\ & \quad -4u - 4 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 4 \end{array}$$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \rightarrow \int \frac{6u^5du}{u^3-u^2} \rightarrow 6\int \frac{u^5du}{u^2(u-1)} \rightarrow 6\int \frac{u^3du}{u-1}$ $\quad div$

$u=\sqrt[6]{x} \;\therefore\; x=u^6$

$dx=6u^5du$

$$div \quad \begin{array}{l} \quad\;\; u^2+u+1 \\ u-1\overline{)\,u^3} \\ \quad\;\; \underline{-u^3+u^2} \\ \qquad\quad -u^2+u \\ \qquad\qquad -u+1 \longleftarrow red \end{array}$$

$\therefore 6\int(u^2+u+1+\frac{1}{u-1})du \rightarrow 6\int u^2du+6\int udu+6\int du+6\int\frac{1}{u-1}du$

$\rightarrow \frac{6u^3}{3}+\frac{6u^2}{2}+6u+6\ln(u-1)+C \rightarrow 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}-1)+C$

Laboratorio virtual división larga de polinomios: http://library.wolfram.com/webMathematica/Education/LongDivide.jsp

16) $\int(3x-5)^2dx$

Sea $\boldsymbol{u=3x-5}$ nuestro cambio de variable

Su diferencial es $du = 3dx$

Como la diferencial de la integral es dx, despejamos: $dx = \frac{du}{3}$

Expresando la integral en términos de la nueva variable:

$$\int (3x - 5)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{3}$$

Aplicando (2) y (5)

$$\int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^2 du = \frac{1}{3} \frac{u^3}{3} = \frac{1}{9} u^3$$

Regresando el cambio de variable de $u \rightarrow x$

$$\frac{1}{9} u^3 = \frac{1}{9} (3x - 5)^3$$

El resultado es:

$$\int (3x - 5)^2 dx = \frac{1}{9} (3x - 5)^3 + C$$

17) $\int \frac{x}{x^2 + 3} dx$

Considere $u = x^2 + 3$, entonces $du = 2x\, dx,$ en la integral aparece $x\, dx$, despejando en la diferencial de la nueva variable se tiene:

$$x\, dx = \frac{du}{2}$$

haciendo las sustituciones correspondientes para expresar la integral en términos de u:

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \int \frac{1du}{u\,2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

Aplicando (6)

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln |x^2+3|$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln |x^2+3| + C$$

18) $\int 5^x dx$

Como la diferencial está completa, aplicar (7)

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

19) $\int 5^{3x} dx$

Sea $u = 3x$, así $du = 3\ dx$, por tanto $dx = \frac{du}{3}$

Sustituyendo y aplicando (7)

$$\int 5^{3x}dx = \int 5^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int 5^u\, du = \frac{1}{3}\left(\frac{5^u}{\ln 5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5^{3x}}{\ln 5}\right)$$

Finalmente:

$$\int 5^{3x}dx = \frac{5^{3x}}{3\ln 5} + C$$

20) $\int xe^{x^2}dx$

Sea $u = x^2$ y $du = 2x\ dx$, despejando $x\ dx = \frac{du}{2}$, y aplicando (8)

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}x\ dx = \int e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

obteniendo así :

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

21) $\int sen(\pi x)dx$

Sea $u = \pi x$, y $du = \pi\ dx$, despejando $dx = \frac{du}{\pi}$ y aplicando (9)

$$\int sen(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\int sen(u)du = -\frac{1}{\pi}\cos(u) + c$$

Por lo tanto:

$$\int sen(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$$

22) $\int \cos\frac{x}{7}\,dx$

Sea $u = \frac{x}{7}$, $du = \frac{dx}{7}$ despejando $dx = 7\ du$, aplicando (10)

$$\int \cos\frac{x}{7}\,dx = \int \cos u(7\,du) = 7\int \cos u\,du = 7\,sen\,u = 7\,sen\,\frac{x}{7}$$

se obtiene:

$$\int \cos\frac{x}{7}\,dx = 7\,sen\,\frac{x}{7} + C$$

23) $\int sec^2(x+1)dx$

Sea $u = x + 1$, $du = dx$, aplicando (11)

$$\int sec^2(x+1)dx = \int sec^2u\,du = \tan u = \tan\,(x+1)$$

Finalmente:

$$\int sec^2(x+1)dx = \tan\,(x+1) + C$$

24) $\int \tan\left(\frac{\theta}{10}\right)d\theta$

Sea $u = \frac{\theta}{10}$, $du = \frac{d\theta}{10}$ $d\theta = 10\,du$ aplicando (15)

$$\int \tan\left(\frac{\theta}{10}\right)d\theta = \int \tan u\;10du = 10\int \tan u\,du = 10\ln\sec u = 10\ln\sec\frac{\theta}{10}$$

Por lo tanto:

$$\int \tan\left(\frac{\theta}{10}\right)d\theta = 10\ln\sec\left(\frac{\theta}{10}\right) + C$$

25) $\int \cot\left(\frac{y}{7}\right) dy$

Sea $u = \frac{y}{7}$, $du = \frac{dy}{7}$ $dy = 7du$ aplicando (16)

$$\int \cot\left(\frac{y}{7}\right) dy = \int \cot\left(\frac{y}{7}\right)(7du) = 7\int \cot u\, du = 7\ln sen\, u = 7\ln sen\left(\frac{y}{7}\right)$$

Por lo tanto:

$$\int \cot\left(\frac{y}{7}\right) dy = 7\ln sen\left(\frac{y}{7}\right) + C$$

26) $\int x^2 \sec x^3\, dx$

Esta integral puede también ser escrita como $\int \sec\left(x^3\right) x^2 dx$

Sea $u = x^3$, $du = 3x^2\, dx$ $x^2 dx = \frac{du}{3}$ aplicando (17)

$$\int \sec\left(x^3\right) x^2 dx = \int \sec u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sec u\, du = \frac{1}{3}\ln\left(\sec u + \tan u\right)$$

Por lo tanto:

$$\int x^2 \sec x^3\, dx = \frac{1}{3}\ln\left(\sec x^3 + \tan x^3\right) + C$$

27) $\int (\tan y + \cot y)^2 dy$

En este caso conviene desarrollar el binomio y aplicar identidades trigonométricas.

$$\int (\tan y + \cot y)^2 dy = \int \left(tan^2 y + 2\tan y \cot y + cot^2 y\right) dy$$

$$= \int tan^2 y\, dy + 2\int \tan y \cot y\, dy + \int cot^2 y\, dy$$

$\tan\theta \cot\theta = 1$
$tan^2\theta = sec^2\theta - 1$
$cot^2\theta = csc^2\theta - 1$

$$= \int (\sec^2 y - 1)dy + 2\int dy + \int (\csc^2 y - 1)dy$$

$$= \int sec^2 y\, dy - \int dy + 2\int dy + \int csc^2 y\, dy - \int dy$$
$$= \int sec^2 y\, dy + \int csc^2 y\, dy$$

Aplicando (11) y (12)

$$= \tan y - \cot y$$

Finalmente:

$$\int (\tan y + \cot y)^2 dy = \tan y - \cot y + C$$

28) $\int \frac{dx}{x^2 + 81}$

Se observa que para esta integral se puede aplicar (19), para esto:

$v^2 = x^2 \quad \therefore \quad v = x$

$a^2 = 81 \quad \therefore \quad a = 9$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 81} = \frac{1}{9} arc\tan \frac{x}{9} + C$$

29) $\int \frac{ds}{3s^2 + 7}$

Al igual que en el ejemplo anterior y aplicando (19)

$v^2 = 3s^2 \quad v = \sqrt{3}s$

$la\ diferencial\text{:}\ dv = \sqrt{3}\,ds\ \ así\,que\ \ ds = \dfrac{dv}{\sqrt{3}}$

$a^2 = 7\ \ entonces\ \ a = \sqrt{7}$

$$\int \frac{ds}{3s^2+7} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{7}} arctan\frac{v}{a} = \frac{1}{\sqrt{21}} arctan\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{7}}\right) + C$$

30) $\int \frac{dx}{x^2-81}$

Aplicar (20), tomando en cuenta que:

$v^2 = x^2 \quad así\,que \quad v = x$

$a^2 = 81 \quad entonces \quad a = 9$

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-81} = \frac{1}{2(9)}\ln\left(\frac{x-9}{x+9}\right) + c = \frac{1}{18}\ln\left(\frac{x-9}{x+9}\right) + C$$

31) $\int \frac{dm}{121-m^2}$

Aplicar (21) y considerar que:

$a^2 = 121 \quad lo\ que\ implica\ que \quad a = 11$

$v^2 = m^2 \quad lo\ que\ implica\ que \quad v = m$

$$\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) + C$$

$$\int \frac{dm}{121 - m^2} = \frac{1}{2(11)} \ln\left(\frac{11 + m}{11 - m}\right) + C = \frac{1}{22} \ln\left(\frac{11 + m}{11 - m}\right) + C$$

32) $\int \frac{xdx}{\sqrt{144 - x^4}}$

Aplicar (22) teniendo que:

$a^2 = 144 \quad entonces \quad a = 12$

$v^2 = x^4 \quad entonces \quad v = x^2$

$la\ diferencial\colon\ dv = 2x\,dx \quad así\ que \quad x\,dx = \frac{dv}{2}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{144 - x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \frac{1}{2} arc\ sen\ \frac{v}{a} = \frac{1}{2}\ arc\ sen\ \frac{x^2}{12} + C$$

33) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 100}}$

Aplicar (23), y haciendo:

$v^2 = x^2 \quad de\ donde \quad v = x$

$a^2 = 100 \quad entonces \quad a = 10$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 100}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 100}\right) + C$$

34) $\int\sqrt{25-2x^2}\,dx$

Aplicar (24) y haciendo:

$a^2 = 25 \quad así\,que \quad a = 5$

$v^2 = 2x^2 \quad por\ lo\ tanto \quad v = \sqrt{2}x$

$la\ diferencial:\ dv = \sqrt{2}\,dx \quad así\,que\ dx = \frac{dv}{\sqrt{2}}$

$$\int\sqrt{a^2-v^2}dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2}arc\,sen\left(\frac{v}{a}\right) + C$$

$$\int\sqrt{25-2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{25-2x^2} + \frac{25}{2}arc\,sen\frac{\sqrt{2}x}{5}$$

Finalmente:

$$\int\sqrt{25-2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{25-2x^2} + \frac{25}{2}arc\,sen\frac{\sqrt{2}x}{5} + C$$

1.6. Integración completando el cuadrado

Existen integrales que contienen en el denominador un trinomio de la forma ax^2+bx+c el cual puede transformarse a binomios de la forma:

$\sqrt{v^2 \pm a^2}, \sqrt{a^2-v^2}, v^2 \pm a^2, v^2 - a^2$

Para ello se utiliza el método de completar un TCP y así aplicar las fórmulas básicas de la (19), a la (23). Ilustremos el procedimiento con algunos ejemplos.

31. $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}$

Se completa el TCP del denominador

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 10 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 10 =$$

$$= \left(x^2 + 2x + 1\right) + 9$$

Entonces

$x^2 + 2x + 10 = (x + 1)^2 + 3^2$

Así la integral se expresa como sigue

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 3^2}$$

Por lo que podemos aplicar la fórmula (19), haciendo:

$v^2 = (x + 1)^2 \; de \; donde \;\; v = x + 1$

$a^2 = 3^2 \, por \; lo \; tanto \;\; a = 3$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} arc\tan \left(\frac{x + 1}{3}\right) + C$$

32. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x}$

Completando el TCP

$$x^2 + 6x = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 3^2$$

Así que, aplicando (20)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 - 3^2} = \frac{1}{2(3)} \ln \left(\frac{x + 3 - 3}{x + 3 + 3}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{x}{x + 6}\right) + C$$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$

Completar el TCP

$$4x^2-4x+3=4\left(x^2-x+\frac{3}{4}\right)=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=4\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]=4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

Así que la integral se expresa como sigue:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}}=$$

Aplicar (23)

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)$$

Este resultado se puede simplificar de la siguiente manera:

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x-1+2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x-1+\sqrt{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\right) - \ln 2\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + C$$

Finalmente se expresa el resultado con una sola constante:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}} = \frac{1}{2}\ln\left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\right) + C$$

34. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 3}\, dx$

Completando el TCP

$$= x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 3 = \left(x^2 + 4x + 4\right) - 7 = (x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2$$

Aplicando (25)

$$\int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + 4x - 3} dx = \int \sqrt{(x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2}$$

$v = x + 2 \quad dv = dx \quad a = \sqrt{7}$

$$\int \sqrt{(x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2}\, dx = \frac{(x + 2)}{2}\sqrt{(x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2} - \frac{(\sqrt{7})^2}{2}\ln\left(x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2}\right) =$$

$$= \frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-3} - \frac{7}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-3}\right)$$

Finalmente

$$\int \sqrt{x^2+4x-3}dx = \frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-3} - \frac{7}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-3}\right) + C$$

35. $\int \frac{3e^x\,dx}{e^{2x}+9e^x+20}$

Completando el TCP del denominador

$$e^{2x}+9e^x+20 = e^{2x}+9e^x+\frac{81}{4}-\frac{81}{4}+20 = \left(e^{2x}+9e^x+\frac{81}{4}\right)+\left(-\frac{81}{4}+20\right) =$$

$$= \left(e^x+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(e^x+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{3e^x\,dx}{e^{2x}+9e^x+20} = 3\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+9e^x+20} = 3\int \frac{e^x\,dx}{\left(e^x+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Aplicando (20)

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right) + c$$

$$3\int \frac{e^x\,dx}{\left(e^x+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\ln\left(\frac{e^x+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{e^x+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}\right) = 3\ln\left(\frac{e^x+4}{e^x+5}\right)$$

Finalmente:

$$\int \frac{3e^x\,dx}{e^{2x}+9e^x+20} = 3\ln\left(\frac{e^x+4}{e^x+5}\right)+c$$

36. $\int\sqrt{3x-x^2}\,dx$

Completando el TCP

$$3x-x^2 =-\left(x^2-3x\right) =-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right) =-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

Aplicando (24)

$$\int\sqrt{a^2-v^2}dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2}+\frac{a^2}{2}arc\ sen\left(\frac{v}{a}\right)+C$$

$$\int\sqrt{3x-x^2}\,dx = \int\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$=\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\,arc\ sen\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{2x-3}{2}\right)}{2}\sqrt{3x-x^2}+\frac{\left(\frac{9}{4}\right)}{2}\,arc\ sen\left(\frac{\frac{2x-3}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{2x-3}{4}\right)\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{8}arc\ sen\left(\frac{2x-3}{3}\right)$$

Finalmente:

$$\int\sqrt{3x-x^2}\,dx = \left(\frac{2x-3}{4}\right)\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{8}arc\ sen\left(\frac{2x-3}{3}\right)+C$$

1.7. Integración con diferenciales trigonométricas

Cuando una integral de funciones trigonométricas no puede resolverse con las fórmulas inmediatas correspondientes, se hace uso de identidades trigonométricas para completar su diferencial. El principal problema que radica en la evaluación de las integrales es convertir el integrando a alguna forma estándar. Cuando integrando implica funciones trigonométricas, a veces es posible convertir el integrando en una forma estándar, mediante la aplicación de operaciones algebraicas y/o identidades trigonométricas. Obviamente, en estos casos, el integrando se puede cambiar a una forma estándar, sin cambiar la variable de integración. Una vez hecho esto, podemos fácilmente escribir el resultado final utilizando las fórmulas estándar.

1. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \quad = \dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$

2. $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \quad = \dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

3. $\dfrac{1}{1+\sin x}$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x - \sec x \cdot \tan x \end{aligned}$$

4. $\dfrac{1}{1-\sin x} \quad = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x + \sec x \cdot \tan x$

5. $\dfrac{1}{1+\cos x}$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cdot \cot x \end{aligned}$$

6. $\dfrac{1}{1-\cos x} \quad = \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

7. $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$
$$\begin{aligned} &= \frac{\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x} \\ &= \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x \\ &= \sec x \cdot \tan x - (\sec^2 x - 1) \\ &= \sec x \cdot \tan x - \sec^2 x + 1 \end{aligned}$$

8. $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$
$$\begin{aligned} &= \frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \operatorname{cosec} x \cdot \cot x - \cot^2 x \\ &= \operatorname{cosec} x \cdot \cot x - (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \\ &= \operatorname{cosec} x \cdot \cot x - \operatorname{cosec}^2 x + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1:

$$\int\sqrt{\left(1+sen(2x))^{2}\right)}dx$$

Solución:

No es posible por fórmulas estándar (inmediatas).

Nosotros consideramos:

$$\begin{aligned} 1+\sin 2x &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x \\ &= (\sin x + \cos x)^2 \\ \therefore \quad I &= \int\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+c$$
$$=\sin x-\cos x+c$$

Ejemplo 2:

$$\int\frac{sen\ x}{\cos^2 x}dx$$

Solución:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$$
$$\therefore\quad I=\int\sec x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec x+c$$

De manera similar

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+(2\cos^2(\frac{x}{2})-1)}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-(1-2sen^2(\frac{x}{2}))}=\frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}$$

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{\tan(\frac{x}{2})}{1/2}+c$$

$$\int\frac{1}{1-\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\csc^2\frac{x}{2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\cot(\frac{x}{2})}{1/2}=-\cot\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

9. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$= \frac{2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{1+2\cos^2(x/2)-1} = \tan(x/2)$$

10. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin((\pi/2)-x)}{1+\cos((\pi/2)-x)} \\ &= \tan(1/2)((\pi/2)-x) = \tan((\pi/4)-(x/2)) \end{aligned}$$

11. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ &= \frac{1}{2\cos^2(x/2)} + \frac{2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)} \\ &= \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} \end{aligned}$$

12. $\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+\cos x}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \\ &= \frac{(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} + \frac{\sin((\pi/2)-x)}{1+\cos((\pi/2)-x)} \\ &= \sec^2 x + \sec x\cdot\tan x + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

13. $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x} \\ &= \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^2 x} && \text{(A)} \\ &= \tan^2 x + 2\sec x\cdot\tan x + \sec^2 x \\ &= (\sec^2 x - 1) + 2\sec x\cdot\tan x + \sec^2 x \\ &= 2\sec^2 x + 2\sec x\cdot\tan x - 1 \end{aligned}$$

14. Similarly, $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\cos^2 x} && \text{(B)} \\ &= \tan^2 x - 2\sec x\cdot\tan x + \sec^2 x \\ &= 2\sec^2 x - 2\sec x\cdot\tan x - 1 \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$a)\int\sqrt{\tan^2(\frac{\pi}{4}+3x)dx}=\int\tan(\frac{\pi}{4}+3x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln(\sec(\frac{\pi}{4}+3x))+c$$

$$b)\int\tan(\frac{\pi}{4}-2x)dx=-\frac{1}{2}\ln(\sec(\frac{\pi}{4}-2x))+c$$

$$c)\int\tan(\frac{\pi}{4}+x)dx=\ln(\sec(\frac{\pi}{4}+x))+c$$

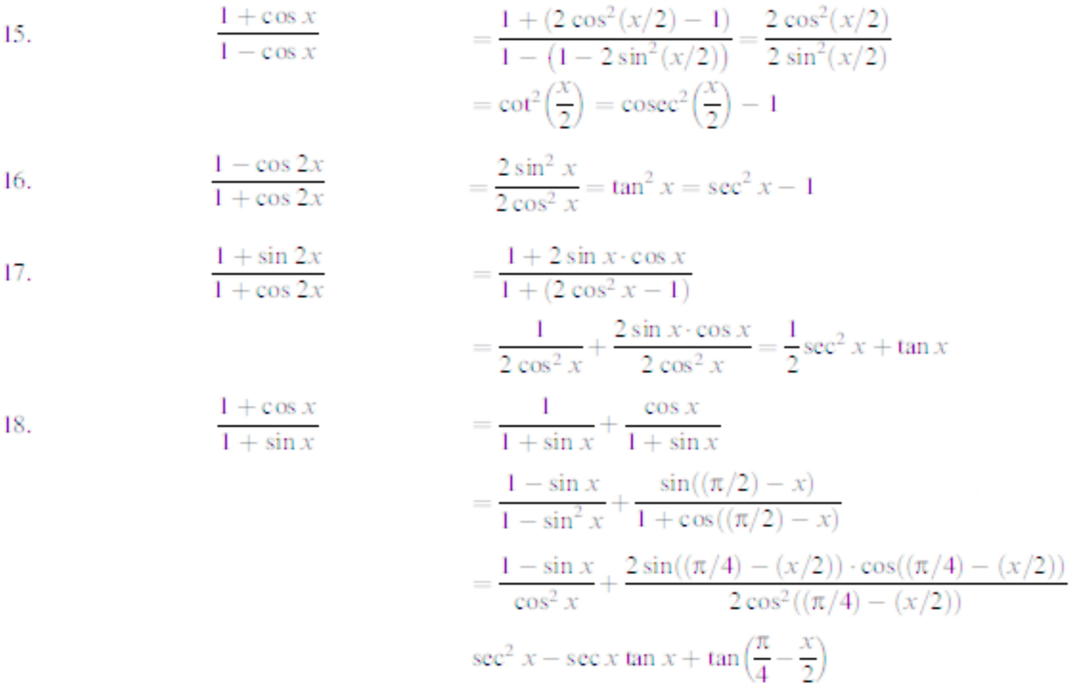
$$d)\int\tan^2(\frac{\pi}{4}+3x)dx=\int(\sec^2(\frac{\pi}{4}+x)-1)dx$$

$$\tan^2 a=\sec^2 a-1$$

$$=\tan(\frac{\pi}{4}+x)-x+c$$

$$e)\int\tan^2(\frac{\pi}{4}-3x)dx=\int\sec^2(\frac{\pi}{4}-3x)-1)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\tan(\frac{\pi}{4}-3x)-x+c$$



15. $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

$$=\frac{1+(2\cos^2(x/2)-1)}{1-(1-2\sin^2(x/2))}=\frac{2\cos^2(x/2)}{2\sin^2(x/2)}$$

$$=\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$$

16. $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

$$=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x=\sec^2 x-1$$

17. $\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}$

$$=\frac{1+2\sin x\cdot\cos x}{1+(2\cos^2 x-1)}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\sec^2 x+\tan x$$

18. $\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$

$$=\frac{1}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin((\pi/2)-x)}{1+\cos((\pi/2)-x)}$$

$$=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin((\pi/4)-(x/2))\cdot\cos((\pi/4)-(x/2))}{2\cos^2((\pi/4)-(x/2))}$$

$$\sec^2 x-\sec x\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

19. $\sqrt{1+\sin x}$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$
$$= \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$$

20. $\sqrt{1-\sin x}$

$$= \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2} = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \;\circ\; \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}}$

$$= \frac{1}{\cos(x/2) + \sin(x/2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin((x/2)+(\pi/4))} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

22. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

23. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \quad \text{c}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

24. $\sqrt{1+\cos x}$

$$= \sqrt{1 + \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)} = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

25. $\sqrt{1-\cos x}$

$$= \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

26. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sec x$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec} x$

28.

$$\sec x+\tan x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)+2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}=\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sec x+\tan x}=\frac{1}{\tan((\pi/4)+(x/2))}=\cot((\pi/4)+(x/2))=\tan((\pi/4)-(x/2))$$

29.

$$\sec x-\tan x=\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}=\frac{1-\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\tan((\pi/4)-(x/2))}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sec x-\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

32.

$$\begin{cases}\sin^2 x\\ \cos^2 x\end{cases}$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

$$\therefore\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

33.

$$\begin{cases}\sin^3 x\\ \cos^3 x\end{cases}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$\therefore\quad \sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\therefore\quad \cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

34.

$$\begin{cases}\tan^2 x\\ \cot^2 x\end{cases}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\therefore \tan^2 x+1=\sec^2 x$$

$$\therefore \tan^2 x=\sec^2 x-1$$

and $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$

$$\therefore \cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$$

35.

$$\begin{cases}\left(\cos\frac{x}{2}\pm\sin\frac{x}{2}\right)^2\\ (\cos 3x\pm\sin 3x)^2\end{cases}$$

$$=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=1\pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1\pm\sin x$$

$$=1\pm\sin 6x$$

36.

$$\begin{cases}(\sec x\pm\tan x)^2\\ (\operatorname{cosec} x\pm\cot x)^2\end{cases}$$

$$=\sec^2 x+\tan^2 x\pm 2\sec x\cdot\tan x$$

$$=2\sec^2 x\pm 2\sec x\cdot\tan x-1$$

$$(\because\ \tan^2 x=\sec^2 x-1)$$

$$=\operatorname{cosec}^2 x+\cot^2 x\pm 2\operatorname{cosec} x\cdot\cot x$$

$$=2\operatorname{cosec}^2 x\pm 2\operatorname{cosec} x\cdot\cot x-1$$

37.

$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x = (\sin x\cdot\cos x)^2 = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} = 4\operatorname{cosec}^2 2x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= \sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x = 4\operatorname{cosec}^2 2x$$

38.

$$\sin A\cdot\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\therefore \quad \sin 5x\cdot\cos x = \frac{1}{2}[\sin 6x+\sin 4x]$$

$$\text{and } \sin x\cdot\cos 5x = \frac{1}{2}[\sin 6x+\sin(-4x)] = \frac{1}{2}[\sin 6x-\sin 4x]$$

$$[\because \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

39.

$$\cos A\cdot\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$(=\sin B\cdot\cos A)$$

$$\therefore \quad \cos 7x\cdot\sin 3x = \frac{1}{2}[\sin 10x-\sin 4x]$$

40.

$$\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\therefore \quad \cos 5x\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}[\cos 8x+\cos 2x]$$

$$\left[=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)\cdot\cos 3x\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-8x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2x+\cos 8x]$$

41.

$$\sin A\cdot\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$\therefore \quad \sin 3x\cdot\sin 5x = \frac{1}{2}[\cos(-2x)-\cos(8x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 8x]$$

$$\left[=\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(8x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-8x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 8x]$$

42.

$$sen(2x)=2senx\bullet\cos=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\int\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}dx=\int sen(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)+c$$

43.
$$\because\quad \left.\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x-1\\ &= 1-2\sin^2 x\\ &= \cos^2 x-\sin^2 x\end{aligned}\right\}$$
$$=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x},$$
$$\int\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

44.
$$\because\quad \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\int\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int\tan 2x\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 3:

$$:\int\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x$$

Solución:

$$\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}=\frac{\sin x/\cos x}{1/\cos x+\sin x/\cos x}$$
$$=\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x-\tan^2 x$$

$$\therefore\quad I=\int\sec x\cdot\tan x\,dx-\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x$$

$$\therefore\sec x.\tan x-(\sec^2 x-1)$$
$$=\sec x-\tan x+x+c$$

Ejemplo 4:

$$\int(\tan x+\cot x)^2\mathrm{d}x$$

Solución:

Considere a

$(\tan x + \cot x)^2$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left[\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cot x}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}, \quad (\because \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \\
\therefore \quad I &= \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx
\end{aligned}$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

Note que:

$$\begin{aligned}
(\tan x + \cot x)^2 &= \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \\
&= (\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 2 \\
&= \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x
\end{aligned}$$

Ejemplo 5:

$\int \cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \, dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\cos 5x + \cos x]\cos x \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos 5x \cdot \cos x + \cos^2 x\right] \\
&= \frac{1}{4}[\cos 6x + \cos 4x] + \frac{1}{2}\cos^2 x \\
\therefore \quad I &= \frac{1}{4}\int \cos 6x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos 4x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\left[\int \frac{\cos 2x + 1}{2} \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}x + c \\
&= \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + c
\end{aligned}
$$

$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

Ejemplo 6:

$$\int \sin 3x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\sin 3x \cdot \sin x &= \sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x \\
\therefore \quad I &= \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

Ejemplo 7:

$$\int \frac{5\cos^3 x + 7\sin^3 x}{2\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$$

Solución:

$$\frac{5\cos^3 x + 7\sin^3 x}{2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{7}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{5}{2} \cot x \cdot \operatorname{cosec} x + \frac{7}{2} \tan x \cdot \sec x$$

$$\therefore \quad I = \frac{5}{2} \int \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \, dx + \frac{7}{2} \int \tan x \cdot \sec x \, dx$$

$$= \frac{7}{2} \int \sec x \cdot \tan x \, dx + \frac{5}{2} \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$$

$$= \frac{7}{2} \sec x - \frac{5}{2} \operatorname{cosec} x + c$$

Ejemplo 8:

$\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

Solución:

$$\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad I = \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

Ejemplo 9:

$\int \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{1+(2\cos^2(x/2)-1)} = \frac{\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad I = \int \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x, \qquad [\because \quad \tan^{-1}(\tan t) = t]$$

$$= \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + c$$

Ejemplo 10:

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

Solución:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\sin((\pi/2)-x)}{1-\cos((\pi/2)-x)} = \tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \quad I = \int \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\frac{sen(a)}{1-\cos(a)} = tag(\frac{1}{2}a)$$

Ejemplo 11:

$$\int\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

$$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^2$$

$$\therefore \quad I = \int \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\mathrm{d}x = \log\left[\sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right] + c$$

I. Integrales de la forma:

$$\int sen^m\, v\, dv \quad o \quad \int cos^n\, v\, dv \quad considerando\ m\ y\ n\ \ impar$$

Este tipo de integrales se descompone en potencias par y quedará una potencia lineal que servirá como diferencial. Aplicar las identidades:

$$sen^2\, x = 1 - cos^2\, x \qquad\qquad cos^2\, x = 1 - sen^2\, x$$

1. $\int cos^3 x\, dx$

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos^2 x \cos x dx = \int \left(1 - sen^2 x\right) \cos x dx$$
$$= \int \cos x dx - \int sen^2 x \cos x dx$$
$$= sen\, x - \int (sen\, x)^2 \cos x dx$$

$$considere\ \ v = sen\, x \quad entonces \quad dv = \cos x dx$$

$$= sen\, x - \int v^2 dv = sen\, x - \frac{v^3}{3} = sen\, x - \frac{(sen\, x)^3}{3}$$

Finalmente:

$$\int cos^3 x\, dx = sen\, x - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

2. $\int sen^5 x\, dx$

$$\int sen^5 x\, dx = \int sen^4 x\, sen\, x dx = \int (sen^2 x)^2 sen\, x dx$$
$$= \int (1 - cos^2 x)^2\, sen\, x\, dx = \int \left(1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x\right) sen\, x dx$$
$$= \int sen\, x\, dx - 2 \int cos^2 x\, sen\, x\, dx + \int cos^4 x\, sen\, x\, dx$$

$considere\ \ v = cos\,x \quad entonces \quad dv =- sen\,x\,dx$

$$= \int sen\,x\,dx + 2\int v^2 dv - \int v^4 dv$$

$$= -\cos x + 2\frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5} =- \cos x + 2\frac{(\cos x)^3}{3} - \frac{(\cos x)^5}{5}$$

Finalmente:

$$\int sen^5 x\,dx =- \cos x + \frac{2}{3}cos^3 x - \frac{1}{5}cos^5 x + C$$

3. $\int sen^3 x\; cos^4 x\,dx$

$$\int sen^3 x\; cos^4 x\,dx = \int sen^2 x\; cos^4 x\; sen\,x\,dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x) cos^4 x sen\,x\,dx$$

$$= \int cos^4 x\; sen\,x\,dx - \int cos^6 x\; senx\,dx$$

$considerando\ ahora\ como\ cambio\ de\ variable$:

$v = \cos x \quad entonces \quad dv =- sen\,x\,dx$

$$=-\int v^4 dv + \int v^6 dv = -\frac{v^5}{5} + \frac{v^7}{7} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

Finalmente:

$$\int sen^3 x \bullet \cos^4 x\,dx = \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

4. $\int e^x sen^3(7e^x)dx$

$$\int e^x sen^3(7e^x)dx = \int sen^2(7e^x) sen\,(7e^x) e^x dx$$

$$= \int \left(1 - cos^2(7e^x)\right) sen\,(7e^x)\; e^x dx$$

$$= \int sen\,(7e^x)\; e^x dx - \int cos^2\,(7e^x) sen(7e^x) e^x dx$$

$considerar\ los\ siguientes\ cambios\ de\ variable$:

$$primera\ integral: v = 7e^{x} \quad dv = 7e^{x}dx \ \ por\ lo\ que \quad e^{x}dx = \frac{dv}{7}$$

$$segunda\ integral: v = \cos\left(7e^{x}\right) \quad dv = -\ 7sen\left(7e^{x}\right)e^{x}dx$$

$$por\ lo\ que: \quad sen\left(7e^{x}\right)e^{x}dx = -\frac{dv}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\int sen\ v\ dv + \frac{1}{7}\int v^{2}dv$$

$$= -\frac{1}{7}\cos v + \frac{1}{7}\frac{v^{3}}{3} = -\frac{1}{7}\cos\left(7e^{x}\right) + \frac{cos^{3}\left(7e^{x}\right)}{21}$$

Finalmente:

$$\int e^{x}sen^{3}(7e^{x})dx = \ -\frac{1}{7}\cos\left(7e^{x}\right) + \frac{cos^{3}\left(7e^{x}\right)}{21} + C$$

5. $\int cos^{7}x\ dx$

$$\int cos^{7}x\ dx = \int cos^{6}x\cos x dx = \int \left(1 - sen^{2}x\right)^{3}\cos x dx$$

$$emplear\ el\ producto: (a - b)^{3} = a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3}$$

$$\left(1 - sen^{2}x\right)^{3} = 1 - 3\ sen^{2}x + 3\ sen^{4}x - sen^{6}x$$

$$= \int \left(1 - 3\ sen^{2}x + 3\ sen^{4}x - sen^{6}x\right)\cos x dx$$

$$= \int \cos x\ dx - 3\int sen^{2}x\cos x\ dx + 3\int sen^{4}x\ \cos x\ dx - \int sen^{6}x\cos x\ dx$$

$$= sen\ x - 3\frac{sen^{3}x}{3} + 3\frac{sen^{5}x}{5} - \frac{sen^{7}x}{7}$$

Finalmente:

$$\int cos^7x\,dx = sen\,x - \; sen^3x + 3\frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C$$

II. Integrales de la forma:

$$\int \boldsymbol{tan^n v\,dv \quad o \quad} \int \boldsymbol{cot^n v\,dv \quad cosiderando\ n\ par\ o\ impar}$$

Para estas integrales, se descompone el integrando en potencias par, con la finalidad de sustituirlas por las siguientes identidades trigonométricas:

$tan^2x = sec^2x - 1 \qquad cot^2x = csc^2x - 1$

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

6. $\int tan^2x\,dx$

$$\int tan^2x\,dx = \int (sec^2x - 1)dx = \int sec^2x\,dx - \int dx = \tan x - x$$

Así que

$$\int tan^2x\,dx = \tan x - x + C$$

7. $\int tan^3x\,dx$

$$\int tan^3x\,dx = \int tan^2x\tan x dx$$
$$= \int (sec^2x - 1)\tan x dx = \int sec^2x\tan x dx - \int \tan x dx$$
$$= \int \tan x sec^2x\,dx - \int \tan x dx$$

$primera\ integral:\quad sea\ v = \tan x \quad dv = sec^2x\ dx$
$segunda\ integral:\quad aplicar\ (15)$

$$= \frac{tan^2x}{2} - (- \ln \cos x\ )$$

$$\int tan^3x\ dx = \frac{tan^2x}{2} + \ln \cos x + C$$

8. $\int cot^4\ xdx$

$$\int cot^4x\ dx = \int cot^2x\ cot^2x\ dx = \int cot^2x(csc^2x - 1)dx = \int cot^2x\ csc^2x\ dx - \int cot^2x\ dx$$

$$= \int (\cot x)^2 csc^2xdx - \int (csc^2x - 1)dx$$
$$= \int (\cot x)^2 csc^2xdx - \int csc^2xdx + \int dx$$

$primera\ integral:\ v = \cot x \quad dv = - csc^2x\ dx$
$segunda\ integral:\ aplicar\ (12)$

$$= - \int v^2dv + \cot x + x = - \frac{v^3}{3} + \cot x + x = - \frac{cot^3x}{3} + \cot x + x$$

Por lo tanto:

$$\int cot^4\ xdx = - \frac{cot^3x}{3} + \cot x + x + C$$

9. $\int cot^5mx\ dx$

$$\int cot^5mx\ dx = \int cot^3mx\ cot^2mx\ dx = \int cot^3mx\ (csc^2mx - 1)dx$$
$$= \int cot^3mx\ csc^2mx\ dx - \int cot^3mxdx$$

$vemos\ que\ la\ segunda\ integral\ contiene\ potencia\ impar, por\ lo\ que\ se\ vuelve\ a\ descomponer$

$en\ una\ potencia\ par:$

$$= \int cot^3mx\, csc^2mx\, dx - \int \cot mx cot^2mx\, dx$$

$$= \int cot^3mx\, csc^2mx\, dx - \int \cot mx(csc^2mx - 1)dx$$

$$= \int cot^3mx\, csc^2mx\, dx - \int \cot mx csc^2mx\, dx + \int \cot mx\, dx$$

$en\ las\ dos\ primeras\ integrales\ realizar\ el\ cambio\ de\ variable$

$$v = \cot mx \qquad dv =- m\, csc^2mx\, dx \qquad csc^2mx =- \frac{dv}{m}$$

$y\ en\ la\ tercera\ integral\ aplicar\, (16)\ con \quad v = mx \quad dv = m\, dx$

$$=- \frac{1}{m}\int v^3dv + \frac{1}{m}\int vdv + \int \cot mx\, dx$$

$$=- \frac{1}{m}\frac{v^4}{4} + \frac{1}{m}\frac{v^2}{2} + \frac{1}{m}\ln sen\, mx$$

$$= \frac{1}{m}\left(- \frac{cot^4mx}{4} + \frac{cot^2}{2} + \ln sen\, mx\right)$$

Por lo tanto:

$$\int cot^5mx\, dx = \frac{1}{m}\left(- \frac{cot^4mx}{4} + \frac{cot^2}{2} + \ln sen\, mx\right) + C$$

10. $\int \left(\frac{\tan x}{\cot x}\right)^3 dx$

Dado que

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\int \left(\frac{\tan x}{\cot x}\right)^3 dx = \int (\tan x \tan x)^3 dx = \int \left(tan^2x\right)^3 dx = \int tan^6xdx$$

Ahora

$$\int tan^6xdx = \int tan^4x\, tan^2x\, dx$$

$$= \int tan^4x(sec^2x - 1)dx$$

$$\int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^4x\, dx$$
$$= \int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^2x\, tan^2xdx$$
$$= \int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^2x\,(sec^2x - 1)dx$$
$$= \int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^2xsec^2x\, dx + \int tan^2xdx$$

$$= \int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^2xsec^2x\, dx + \int (sec^2x - 1)dx$$
$$= \int tan^4x\, sec^2x\, dx - \int tan^2xsec^2x\, dx + \int sec^2xdx - \int dx$$
$$= \frac{tan^5x}{5} - \frac{tan^3x}{3} + \tan x - x$$

$finalmente\ tenemos\ que$:

$$\int \left(\frac{\tan x}{\cot x}\right)^3 dx = \frac{tan^5x}{5} - \frac{tan^3x}{3} + \tan x - x + C$$

III. Integrales de la forma

$$\int \boldsymbol{sec^n v\, dv} \quad \boldsymbol{o} \quad \int \boldsymbol{csc^n v\, dv} \quad con\ \boldsymbol{n}\ par$$

Para resolver este tipo de integrales basta con descomponer el integrando en potencias pares para luego aplicar las identidades trigonométricas:

$sec^2x = 1 + tan^2x$ $\qquad$ $csc^2x = 1 + cot^2x$

11. $\int sec^2\theta\, d\theta$

Aplicando fórmula inmediata (11)

$$\int sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta + C$$

12. $\int sec^4 x dx$

$$\int sec^4 x dx = \int sec^2 x sec^2 x dx$$
$$= \int (1 + tan^2 x) sec^2 x dx$$

$realizar\ cambio\ de\ variable$:

$v = \tan x\ \ entonces\ \ dv = sec^2 x dx$

$$\int (1+v^2) dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v_3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$
$$\int \sec^4 x\ \ dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

13. $\int csc^6 x dx$

$$\int csc^6 x dx = \int csc^4 x\ csc^2 x\ dx$$
$$= \int (csc^2 x)^2 csc^2 x dx = \int (1 + cot^2 x)^2 csc^2 x dx$$
$$= \int (1 + 2cot^2 x + cot^4 x) csc^2 x dx$$
$$= \int csc^2 x dx + 2\int cot^2 x csc^2 x dx + \int cot^4 x csc^2 x dx$$

$segunda\ y\ tercera\ integral\ hacer$: $v = \cot x\ \ \ y\ \ dv = - csc^2 x dx$

$primera\ integral\ aplicar\ (12)\ o\ realizar\ mismo\ cambio\ de\ variable$

$$= - \int dv - 2\int v^2 dv - \int v^4 dv$$
$$= - v - 2\frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5} = - v\left(1 + \frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{5}v^4\right)$$

$$=-\cot x(1+\frac{2}{3}\cot^2 x+\frac{1}{5}\cot^4 x)+c$$

$$\int \csc^6 x\,dx=-\cot x(1+\frac{2}{3}\cot^2 x+\frac{1}{5}\cot^4 x)+c$$

IV. Integrales de la forma:

$$\boldsymbol{\int tan^m v\, sec^n v\, dv \quad o \quad \int cot^m v csc^n v\, dv \quad m\ (par)\ y\ \ n\ (par\ o\ impar)}$$

Cuando se tiene este producto de funciones, se pueden integrar aplicando las identidades, del caso III, cuando n es par:

$sec^2x = 1 + tan^2x \qquad\qquad csc^2x = 1 + cot^2x$

Cuando m es impar, buscar que se tengan diferenciales de la forma

$\sec v\tan v\, dv \quad o \quad \csc v\cot v\, dv$

14. $\int tan^2xsec^4xdx$

$como\ n\ es\ par$:

$$\int tan^2xsec^4xdx = \int tan^2xsec^2xsec^2xdx$$

$$= \int tan^2x(1 + tan^2x)sec^2xdx$$

$hagamos\ \ v = \tan x \quad dv = sec^2xdx$

$$=\int v^2(1+v^2)dv=\int v^2dv+\int v^4dv=\frac{v_3}{3}+\frac{v_5}{5}=\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}+c$$

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx=\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}+c$$

15. $\int \tan^3 x\sec^4 x\,dx$

$como\ n\ es\ par$:

$$\int tan^3sec^4xdx = \int tan^3xsec^2xsec^2xdx$$

$$= \int tan^3x(1 + tan^2x)sec^2xdx$$

$Sea\ \ v = \tan x \qquad dv = sec^2xdx$

$$\int v^3(1+v^2)dv = \int v^3\,dv + \int v^5\,dv = \frac{v^4}{4}+\frac{v^6}{6} = \frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{6}+c$$

$$\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx = \frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{6}+c$$

16. $\int tan^3xsec^4xdx$

$como\ m\ es\ impar$:

$$\int tan^3xsec^4xdx = \int tan^2x\mathbf{tan}\ \boldsymbol{xsecx}sec^3xdx$$

$$= \int (sec^2x - 1)\tan x\sec x\ sec^3xdx$$

$$\int (sec^2x - 1)(sec^3x)\tan x\sec xdx$$

$$= \int (sec^5x - sec^3x)\tan x\sec xdx$$

$sea\ \ \ v = \sec x \qquad dv = \sec x\tan xdx$

$$= \int (v^5 - v^3)dv = \int v^5\,dv - \int v^3\,dv = \frac{v^6}{6}-\frac{v^4}{4} = \frac{\sec^6 x}{6}-\frac{\sec^4 x}{4}+c$$

$$\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx = \frac{\sec^6 x}{6}-\frac{\sec^4 x}{4}+c$$

17. $\int cot^3 10xcsc^3 10xdx$

$como\ m\ es\ impar$:

$$\int cot^3 10xcsc^3 10xdx = \int cot^2 10x\mathbf{cot}\ \boldsymbol{10x}\mathbf{csc}\ \boldsymbol{10x}csc^2 10xdx$$

$$= \int (csc^2 10x - 1)\cot 10x\csc 10xcsc^2 10xdx$$

$$= \int (csc^2 10x - 1)csc^2 10x\csc 10x\cot 10xdx$$

$$= \int (csc^4 10x - csc^2 10x)\csc 10x\cot 10xdx$$

$sea\ \ \ \ v = \csc 10x \qquad dv =- 10\csc 10xcot10x\ dx$

$$=- \frac{1}{10}\int (v^4 - v^2)dv =- \frac{1}{10}\int v^4dv + \frac{1}{10}\int v^2dv =- \frac{1\ v_5}{105} + \frac{1\ v^3}{10\ 3} =- \frac{csc^5 10x}{50} + \frac{csc^3 10x}{30}$$

$$\int cot^3 10x\ csc^3 10x\ dx =- \frac{csc^5 10x}{50} + \frac{csc^3 10x}{30} + C$$

18. $\int cot^5 x csc^3 x dx$

$como\ m\ es\ impar$:

$$\int cot^5 x csc^3 x dx = \int cot^4 x \mathbf{cot\ x csc\ x} csc^2 x\ dx$$
$$= \int (cot^2 x)^2 \csc x \cot x\ csc^2 x\ dx$$
$$= \int (csc^2 x - 1)^2 \csc x \cot x\ csc^2 x\ dx$$
$$= \int (csc^2 x - 1)^2\ csc^2 x \csc x \cot x dx$$

$$= \int (csc^4 x - 2csc^2 x + 1) csc^2 x \csc x \cot x dx$$
$$= \int (csc^6 x - 2csc^4 x + csc^2 x) \csc x \cot x\ dx$$

$sea\quad v = \csc x \qquad dv = - \csc x \cot x\ dx$

$$= - \int (v^6 - 2v^4 + v^2) dv = - \int v^6 dv + 2\int v^4 dv - \int v^2 dv$$
$$= -\frac{v^7}{7} + 2\frac{v^5}{5} - \frac{v^3}{3} = -\frac{\csc^7 x}{7} + 2\frac{\csc^5 x}{5} - \frac{\csc^3 x}{3} + c$$
$$\int \cot^5 x \csc^3 x\, dx = -\frac{\csc^7 x}{7} + 2\frac{\csc^5 x}{5} - \frac{\csc^3 x}{3} + c$$

V. Integrales de la forma:

$$\int \boldsymbol{sen^m\, v\, dv} \quad \boldsymbol{o} \quad \int \boldsymbol{cos^n\, v\, dv} \qquad \boldsymbol{m\ y\ n\ par}$$

En este tipo de integrales, aplicar las identidades trigonométricas de ángulo doble:

$$sen^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \qquad cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \qquad sen\,\theta \cos\theta = \frac{1}{2} sen\ 2\theta$$

19. $\int sen^2(mx)\ dx$

$$\int sen^2(mx)\ dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2mx)\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2mx)dx$$

$para\ la\ segunda\ integral\ hacer\ \ v = 2mx \quad\ dv = 2m\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2m}\int \cos v\, dv$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}sen\ v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\ sen\ (2mx)$$

$$\int sen^2(mx)\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\ sen\ (2mx) + C$$

20. $\int cos^2 x dx$

$$\int cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx$$

$Sea\ \ v = 2x \quad dv = 2\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\int \cos v\, dv$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,sen\ v = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,sen\ 2x$$

$$\int cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,sen\ 2x + C$$

21. $\int \frac{sen^3 \pi x}{\csc \pi x} dx$

$$\int \frac{sen^3 \pi x}{\csc \pi x} dx = \int sen^3 \pi x \, sen \, \pi x \, dx = \int sen^4 \pi x dx = \int \left(sen^2 \pi x\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\,(2\pi x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - (2)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) + \frac{1}{4}cos^2(2\pi x)\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{1}{4}cos^2 2\pi x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2\pi x \, dx + \frac{1}{4}\int cos^2 \boldsymbol{2\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2\pi x \, dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \boldsymbol{4\pi x}\right) dx$$

$$\frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2\pi x \, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4\pi x dx$$

$segunda\ integral \quad v = 2\pi x \quad dv = 2\pi dx$

$cuarta\ integral \quad v = 4\pi x \quad dv = 4\pi dx$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2\pi}\int \cos v \, dv + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \bullet \frac{1}{4\pi}\int \cos v \, dv$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4\pi}(sen\ v) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32\pi}(sen\ v)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4\pi}\, sen\ 2\pi x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32\pi}\, sen\ 4\pi x$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x = \frac{2}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{3}{8}x$$

$$\int \frac{sen^3 \pi x}{\csc \pi x} dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4\pi}\, sen\ 2\pi x + \frac{1}{32\pi}\, sen\ 4\pi x + C$$

22. $\int sen^2x\, cos^2x\, dx$

$$\int sen^2x\, cos^2x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$aplicando \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2 2xdx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4xdx$$

$$sea \;\; v = 4x \quad dv = 4dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\int \cos v\, dv =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen\, v = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen\, 4x$$

$$\int sen^2x\, cos^2x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen\, 4x + C$$

VI. Integrales de la forma:

$$\int sen\, mx\cos nx\, dx \quad \int sen\, mx\; sen\, nx\, dx \quad \int \cos mx\cos nx\, dx \quad m \neq n$$

Cuando el integrando se compone de estos productos, aplicar las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen\, x\cos y = \frac{1}{2}\, sen\,(x+y) + \frac{1}{2}\, sen\,(x-y)$$
$$sen\, x\; sen\, y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

23. $\int sen\ 7x \cos 2x\ dx$

$$\int sen\ 7x \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int sen\ (7x+2x)dx + \frac{1}{2}\int sen\ (7x-2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sen\ 9x dx + \frac{1}{2}\int sen\ 5x dx$$

$v = 9x \quad dv = 9dx \qquad v = 5x \quad dv = 5dx$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{9}\int senv\, dv + \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{5}\int senv\, dv$$

$$= \frac{1}{18}(-\cos v) + \frac{1}{10}(-\cos v) = -\frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 5x}{10}$$

Por lo tanto:

$$\int sen\ 7x \cos 2x\ dx = -\frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 5x}{10} + C$$

24. $\int sen\ 7x \text{sen } 2x\ dx$

$$\int sen\ 7x \text{sen } 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \cos(7x-2x)dx - \frac{1}{2}\int \cos(7x+2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx$$

$v = 5x \quad dv = 5dx \qquad v = 9x \quad dv = 9dx$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{5}\int \cos v\, dv - \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{9}\int \cos v\, dv$$

$$= \frac{1}{10} sen\ v - \frac{1}{18} sen\ v = \frac{sen\ 5x}{10} - \frac{sen\ 9x}{18}$$

Por lo tanto:

$$\int sen\ 7x \text{sen } 2x\ dx = \frac{sen\ 5x}{10} - \frac{sen\ 9x}{18} + C$$

25. $\int \cos 7x \cos 2x\ dx$

$$\int \cos 7x \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \cos(7x-2x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(7x+2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos 5x dx+\ \frac{1}{2}\int \cos 9x dx$$

$v=5x \quad dv=5dx \qquad v=9x \quad dv=9dx$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{5}\int \cos v dv+\frac{1}{2}\frac{1}{9}\int \cos v dv$$

$$=\frac{1}{10}sen\, v+\frac{1}{18}sen\, v=\frac{sen\, 5x}{10}+\frac{sen\, 9x}{18}$$

Por lo tanto:

$$\int sen\, 7x \text{sen } 2x\, dx=\frac{sen\, 5x}{10}+\frac{sen\, 9x}{18}+C$$

1.8. Integración por partes

Este método es útil cuando se tiene el producto de dos funciones. La fórmula para integración por partes es:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Esta fórmula se deduce de la diferencial del producto de dos funciones.

$$d(uv) = u\, dv + v\, du$$

Despejando $u\, dv$

$$u\, dv = d(uv) - v\, du$$

Al integra la expresión, se obtiene dicha fórmula.

Esta fórmula permite expresar la integral original en términos de otra más fácil de integrar, dependiendo de la manera en que se seleccione $u \; y \; dv$. Dado que es fundamental escoger estas partes de la integral original, se sugiere para su elección:

a) Determinar la parte del integrando u tal que al derivarla resulte una función más sencilla que u. El resto del integrando se tomará como dv.

b) Determinar como dv la parte del integrando que sea más complicada y que se pueda integrar, así el resto del integrando se tomará como u.

Para los siguientes casos se utiliza esta técnica de integración por partes:

(Algebraicas) por (trigonométricas)
(Algebraicas) por (exponenciales)
(Algebraicas) por (logarítmicas)
(Exponenciales) por (trigonométricas)
Logarítmicas
Trigonométricas inversas
(Algebraicas) por (trigonométricas inversas)

Veamos algunos ejemplos:

1. $\int x \, sen \, x \, dx$

$$Sean \;\; u = x \;\; y \;\; dv = sen \, x \, dx$$

$$entonces \;\; du = dx \;\; y \quad v = \int dv = \int sen \, x \, dx = - \cos x$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\int x \, sen \, x \, dx = - x\cos x - \int (\, - \, cos \, x) dx = - x\cos x + \int \cos x \, dx = - x\cos x + sen \, x$$

Por lo tanto:

$$\int x\,sen\,x\,dx = sen\,x - xcos\,x + C$$

2. $\int xe^{x}\,dx$

$$Sean\ \ u = x \quad y\ \ dv = e^{x}dx$$
$$entonces\ \ \ du = dx\ \ \ y\ \ \ v = \int dv = \int e^{x}dx = e^{x}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} = e^{x}(x-1)$$

Por lo tanto:

$$\int xe^{x}\,dx = e^{x}(x-1) + C$$

3. $\int x\ln x\,dx$

$$Sean\ \ u = \ln x\ \ \ y\ \ \ dv = x\,dx$$
$$entonces\ \ du = \frac{dx}{x} \quad y\ \ \ v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^{2}}{2}$$

Aplicando la fórmula

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^{2}}{2}\ln x - \int \frac{x^{2}dx}{2\ \ x} = \frac{x^{2}}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^{2}}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^{2}}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^{2}}{2}\ln x - \frac{x^{2}}{4} + C$$

4. $\int \ln x\,dx$

$$Sean\,u = \ln x\ \ y\ \ \ dv = dx$$

$$entonces\ \ du = \frac{dx}{x} \quad y\ \ \ v = \int dv = \int dx = x$$

Aplicando fórmula

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$$

Por lo tanto:

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$$

5. $\int arc\ sen\ ax\ dx$

$$Sean\quad u = arc\ sen\ ax\quad y\quad dv = dx$$

$$entonces\quad du = \frac{adx}{\sqrt{1-(ax)^2}}\quad y\ \ v = x$$

Aplicando fórmula

$$\int arc\ sen\ ax\ dx = x\ arc\ sen\ ax - \int \frac{ax\ dx}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

Ahora aplicar un cambio de variable para la nueva integral

$$sea\quad v = 1 - a^2x^2\quad dv =- 2a^2x\ dx\quad entonces\quad ax\ dx = \frac{dv}{-2a}$$

$$\int \frac{ax\ dx}{\sqrt{1-(ax)^2}} =- \frac{1}{2a}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} =- \frac{1}{2a}\int v^{-\frac{1}{2}}dv =- \frac{1}{2a}\left(\frac{\sqrt{v}}{\frac{1}{2}}\right) =- \frac{1}{a}\sqrt{1-(ax)^2}$$

Así:

$$\int arc\ sen\ ax\ dx = x\ arc\ sen\ (ax) + \frac{1}{a}\sqrt{1-(ax)^2} + C$$

6. $\int x\ arc\tan\ (x)\ dx$

$$Sean\quad u = arc\tan x\quad y\quad dv = x\ dx$$

$$entonces\quad du = \frac{dx}{1+x^2}\quad y\quad v = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando la fórmula

$$\int x\, arctan\,(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\, arctan\, x - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{2}\, arctan\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

Obtengamos la nueva integral, para ello, se realiza la división:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} arctan\, x$$

Por lo tanto:

$$\int x\, arctan\,(x)\, dx = x\, arctan\, x + \frac{1}{2} arctan\, x - \frac{x}{2} + C$$

7. $\int e^x \cos x\, dx$

$$Sean \quad u = e^x \quad y \quad dv = \cos x\, dx$$

$$entonces \quad du = e^x dx \quad y \quad v = \int dv = \int \cos x\, dx = sen\, x$$

Así:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x sen\, x - \int e^x sen\, x\, dx$$

La nueva integral tiene que resolverse nuevamente por partes, así que:

$$u = e^x \quad y \quad dv = sen\, x\, dx$$

$$du = e^x \quad y \quad v = \int sen\, x\, dx = - \cos x$$

Por lo que

$$\int \boldsymbol{e^x sen\, x\, dx} = - e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx = - e^x \cos x + \int e^x \cos x$$

Sustituyendo

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x sen\,x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\right) = e^x sen\,x + e^x \cos x - \int e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x sen\,x + e^x \cos x - \int e^x \cos x$$

Despejando $\int e^x \cos x$ se obtiene que:

$$e^x sen\,x + e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = e^x sen\,x + e^x \cos x$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(senx + \cos x) + c$$

Finalmente:

$$e^x sen\,x + e^x \cos x = \frac{e^x}{2}(sen\,x + cosx) + C$$

8. $\int x^3 \ln x\,dx$

$$Sean \quad u = \ln x \quad y \quad dv = x^3 dx$$

$$entonces \quad du = \frac{dx}{x} \quad y \quad v = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4 dx}{4\ x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

9. $\int sec^3 x\,dx$

Primeramente se descompone la integral de la siguiente manera:

$$\int sec^3 x\,dx = \int \sec x\, sec^2 x\,dx$$

$$Sean \quad u = \sec x \quad y \quad dv = sec^2 x\,dx$$

$$entonces \quad du = \sec x \tan x\,dx \quad y \quad v = \int sec^2 x\,dx = \tan x$$

$$\int sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan x(\sec x \tan x)dx$$

$$\int sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\, tan^2 x\,dx$$

$$\int sec^{3}x\,dx = \sec x\tan x - \int \sec x\left(sec^{2}x - 1\right)dx$$

$$por\ la\ identidad:\ \ tan^{2}x = sec^{2}x - 1$$

$$\int sec^{3}x\,dx = \sec x\tan x = \sec x\tan x - \int sec^{3}x\,dx + \int \sec x dx$$
$$\int sec^{3}x\,dx + \int sec^{3}x\,dx = \sec x\tan x + \int \sec x dx$$
$$2\int sec^{2}x\,dx = \sec x\tan x + \ln\left(\sec x + \tan x\right)$$

Finalmente:

$$\int sec^{3}x\,dx = \frac{1}{2}\left[\sec x\tan x + \ln\left(\sec x + \tan x\right)\right] + C$$

10. $\int \frac{x^{3}}{\sqrt{b+x^{2}}}dx$

Descomponer la integral de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^{3}}{\sqrt{b+x^{2}}}dx = \int \frac{x^{2}x}{\sqrt{b+x^{2}}}dx$$

$$Sean\ \ u = x^{2}\ \ \ y\ \ \ dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{b+x^{2}}}$$
$$entonces\ \ \ du = 2x\,dx\ \ \ y\ \ \ v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{b+x^{2}}} = \sqrt{b+x^{2}}$$

Para obtener v la integral se resuelve haciendo un cambio de variable:

$$sea\ \ t = b + x^{2}\ \ así\ \ dt = 2x\,dx\ \ \ y\ \ \ x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b+x^{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \sqrt{b+x^{2}}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{b+x^2}}dx = x^2\sqrt{b+x^2} - \int 2x\sqrt{b+x^2}dx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{b+x^2}}dx = x^2\sqrt{b+x^2} - 2\int \sqrt{b+x^2}x\,dx$$

Esta última integral se resuelve aplicando nuevamente cambio de variable

$$sea\ \ t = b + x^2\ \ así\ \ dt = 2x\,dx\ \ \ y\ \ \ x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \sqrt{b+x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(b+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{b+x^2}}dx = x^2\sqrt{b+x^2} - \frac{2}{3}(b+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

1.9. Integración por fracciones parciales

Este método se aplica cuando la integral se hace respecto a una función racional:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)\ y\ Q(x)$ representan polinomios, de manera tal que $P(x)$ tiene grado menor que $Q(x)$.

En este método de integración se presentan varios casos.

Caso I. El denominador tiene únicamente factores de primer grado y no se repiten.

Esto permite que a cada factor le corresponda una fracción parcial como se indica:

$$factor\ de\ la\ forma{:}ax + b \qquad le\ corresponde\ \frac{A}{ax+b}$$

lo que implica que la constante A debe determinarse.

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 11x + 30}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 11x + 30} = \int \frac{dx}{(x-5)(x-6)} = \int \frac{A}{(x-5)}dx + \int \frac{B}{(x-6)}dx$$

$Para\ obtener\ las\ constantes\ \ A\ y\ B,\ habrá\ que\ determinar\ las$

$fracciones\ parciales,\ cuya\ suma,\ resulte\ en\ la\ fracción\ original:$

$$\frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-6)} = \frac{A(x-6) + B(x-5)}{(x-5)(x-6)}$$

$para\ ello,\ los\ numeradores\ deben\ ser\ iguales$

$1 = A(x-6) + B(x-5)$

$desarrollando\ y\ factorizando\ se\ tiene:$

$1 = Ax - 6A + Bx - 5B = (A+B)x - 6A - 5B$

$lo\ que\ genera\ el\ siguiente\ sistema\ de\ ecuaciones:$

$A + B = 0$

$-6A - 5B = 1$

$como\ ejercicio\ el\ lector\ debe\ comprobar\ que\ la\ solución\ es{:}A = -1\ y\ B = 1$

$$\int \frac{A}{(x-5)}dx + \int \frac{B}{(x-6)}dx = -\int \frac{dx}{x-5} + \int \frac{dx}{x-6} = -\ln(x-5) + \ln(x-6)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-11x+30} = -\ln(x-5) + \ln(x-6) + c$$

$de\ acuerdo\ con\ las\ leyes\ de\ los\ logartimos{:}$

$\log ab = \log a + \log b \qquad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log a^n = n\log a \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$

$\log 1 = 0 \qquad log_a\, a = 1$

$el\ resultado\ de\ la\ integral\ puede\ ser\ expresado\ de\ la\ siguiente\ manera$

$$\int \frac{dx}{x^2-11x+30} = \ln(x-6) - \ln(x-5) + C = \ln\left(\frac{x-6}{x-5}\right) + C$$

2. $\int \frac{(4x-2)}{x^3-x^2-2x}dx$

$primeramente\ factorizar\ el\ denominador$

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x^2-x-2)} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{c}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$igualando\ numeradores{:}$

$$4x - 2 = A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)$$

$desarrolando\ y\ factorizando\ se\ tiene{:}$

$$4x - 2 = A\left(x^2 - x - 2\right) + B\left(x^2 + x\right) + C\left(x^2 - 2x\right)$$

$$4x - 2 = Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx$$

$$4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (- A + B - 2c)x - 2A$$

$lo\ que\ genera\ el\ siguiente\ sistema\ de\ ecuaciones:$
$A + B + C = 0$
$- A + B - 2c = 4$
$- 2A =- 2$

$comprobar\ que\ la\ solución\ es: \quad A = 1, B = 1\ y\ C =- 2$

$$\int \frac{(4x - 2)}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} + \frac{- 2}{x + 1}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 2} - 2\int \frac{dx}{x + 1}$$

$$= \ln x + \ln\,(x - 2) - 2\ln\,(x + 1)$$

$aplicando\ leyes\ de\ logaritmos:$

$$= \ln x(x - 2) - \ln\,(x + 1)^2 = \ln \frac{x(x - 2)}{(x + 1)^2} = \ln \frac{x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$$

Finalmente:

$$\int \frac{(4x - 2)}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \ln \frac{x^2 - 2x}{(x + 1)^2} + C$$

Caso II. El denominador tiene únicamente factores de primer grado y algunos se repiten.

En este caso si se tiene un factor de la forma:

$$(ax + b)^n$$

Se lleva a cabo una suma desarrollada de la siguiente forma:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{K}{ax+b}$$

De manera que habrá que determinar todas las constantes: $A, B, C, \ldots K$

3. $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$

Observando el denominador, se concluye que hay tres veces el mismo denominador:

$(x-1)^3=(x-1)(x-1)(x-1)$

Entonces se debe desarrollar una suma como sigue:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A+B(x-1)+C(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{A+Bx-B+C\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)^3}=\frac{A+Bx-B+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)^3}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{cx^2+(B-2C)x+A-B+C}{(x-1)^3}$$

$igualando\ numeradores$:

$x^2=Cx^2+(B-2C)x+A-B+C$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$A - B + C = 0$
$B - 2C = 0$
$C = 1$

solución del sistema: $A = 1,\ B = 2 \quad y \quad C = 1$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx = \int \left(\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \int (x-1)^{-3}dx + 2\int (x-1)^2 dx + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + 2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right] + \ln(x-1)$$

$$=- \frac{1}{2(x-1)^2} - 2\left[\frac{1}{(x-1)}\right] + \ln(x-1)$$

Se concluye que:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx =- \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln(x-1) + C$$

4. $\int \frac{4x^2 - 8}{x^3 + 2x^2}dx$

Al factorizar el denominador se observa que el factor x^2, es repetible:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) = x \cdot x \cdot (x+2)$$

$$\frac{4x^2 - 8}{x^3 + 2x^2} = \frac{4x^2 - 8}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx(x+2) + Cx^2}{x^2(x+2)}$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2}{x^2(x+2)} = \frac{(B+C)x^2 + (A+2B)x + 2A}{x^2(x+2)}$$

al igualar numeradores:

$$4x^2 - 8 = (B+C)x^2 + (A+2B)x + 2A$$

resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$B + C = 4$
$A + 2B = 0$
$2A = - 8$

cuya solución es: $A = - 4$ $B = 2$ *y* $C = 2$

$$\int \frac{4x^2 - 8}{x^3 + 2x^2} dx = \int \frac{4x^2 - 8}{x^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x+2} \right) dx = - 4 \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= - 4 \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= - 4 \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) + 2 \ln x + 2 \ln (x+2) = \frac{4}{x} + 2 \ln x + 2 \ln (x+2) = \frac{4}{x} + 2 \ln x(x+2)$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{4x^2 - 8}{x^3 + 2x^2} dx = \frac{4}{x} + 2 \ln x(x+2) + C$$

Caso III. El denominador tiene factores de segundo grado y ninguno se repite.

En este caso se considera que para un factor de la forma: $ax^2 + bx + c$ se le asocie una fracción con la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Así, en cada fracción será necesario determinar las constantes: $A \, y \, B$

5. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$

Al factorizar el denominador del integrando tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

Lo que resulta en un factor lineal x y en un factor cuadrático $x^2 + 1$, el cual no se puede factorizar nuevamente. Por lo tanto las fracciones parciales serán:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + cx}{x(x^2 + 1)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)}$$

$igualando \; los \; numeradores$:

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

$obteniendo \; el \; siguiente \; sistema \; de \; ecuaciones$:

$A + B = 0$

$C = 0$

$A = 1$

$cuya\ solución\ es$: $A = 1 \quad B =- 1 \quad C = 0$

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x\left(x^2 + 1\right)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x + 0}{x^2 + 1}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}dx$$

$en\ la\ segunda\ integral$: $\quad v = x^2 + 1 \qquad dv = 2xdx$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \ln x - \frac{1}{2}\ln v = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$$

$aplicando\ leyes\ de\ los\ logaritmos$:

$$= \frac{2\ln x - \ln\left(x^2 + 1\right)}{2} = \frac{1}{2}\left[2\ln x - \ln\left(x^2 + 1\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\ln x^2 - \ln\left(x^2 + 1\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Finalmente:

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2 + 1} + C$$

6. $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{\left(x^2 + x + 4\right)(x + 2)}dx$

Se puede observar que el término cuadrático no se puede factorizar, por lo cual, las fracciones parciales correspondientes serán:

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{\left(x^2 + x + 4\right)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 4} + \frac{C}{x + 2}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+x+4}+\frac{C}{x+2}=\frac{(Ax+B)(x+2)+C\left(x^2+x+4\right)}{\left(x^2+x+4\right)(x+2)}$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+Bx+2B+Cx^2+Cx+4C}{\left(x^2+x+4\right)(x+2)}=\frac{(A+C)x^2+(2A+B+C)x+(2B+4C)}{\left(x^2+x+4\right)(x+2)}$$

procedemos a igualar los numeradores:

$$3x^2+2x-2=(A+C)x^2+(2A+B+C)x+(2B+4C)$$

generando el siguiente sistema de ecuaciones:

$A+C=3$
$2A+B+C=2$
$2B+4C=-2$

cuya solución es: $A=2 \quad B=-3 \quad C=1$

$$\int\frac{3x^2+2x-2}{\left(x^2+x+4\right)(x+2)}dx=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+4}+\frac{C}{x+2}\right)dx=\int\left(\frac{2x-3}{x^2+x+4}+\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\int\frac{2x-3}{x^2+x+4}dx+\int\frac{1}{x+2}dx$$

en la primera integral hacer: $v=x^2+x+4 \qquad dv=(2x+1)dx$

Para tener la diferencial completa habrá que sumar y restar 1:

$$=\int\frac{2x+1-3-1}{x^2+x+4}dx+\int\frac{1}{x+2}dx=\int\frac{2x+1-4}{x^2+x+4}dx+\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\int\frac{2x+1}{x^2+x+4}dx-4\int\frac{dx}{x^2+x+4}+\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\ln\left(x^2+x+4\right)-4\int\frac{dx}{x^2+x+4}+\ln(x+2)$$

para la integral faltante habrá que completar el TCP

$$x^2+x+4=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+4=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2$$

Aplicar la fórmula (19)

$$\int\frac{dx}{x^2+x+4}=\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}arc\tan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}arc\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$$

Sustituyendo en el resultado parcial obtenido:

$$=\ln\left(x^2+x+4\right)-4\left(\frac{2}{\sqrt{15}}arc\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\right)+\ln\left(x+2\right)$$

$$=\ln\left(x^2+x+4\right)-\frac{8}{\sqrt{15}}arc\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+\ln\left(x+2\right)$$

Finalmente el resultado es:

$$\int\frac{3x^2+2x-2}{\left(x^2+x+4\right)(x+2)}dx=\ln\left(x^2+x+4\right)-\frac{8}{\sqrt{15}}arc\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+\ln\left(x+2\right)+C$$

Caso IV. El denominador tiene solo factores de segundo grado y algunos se repiten.

Cuando se tiene un factor cuadrático de la forma.

$\left(ax^2+bx+c\right)^n$

Las fracciones parciales se obtienen de una suma desarrollada de la forma:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}+\ldots+\frac{Kx+L}{ax^2+bx+c}$$

Teniendo que determinar las constantes: $A,B,C,D,E,F \ldots K\ y\ L$

7. $\int \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}dx$

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{Ax+Bx^3+4Cx+Dx^2+4D}{(x^2+4)^2}=\frac{Cx^3+Dx^2+Ax+4Cx+4D+B}{(x^2+4)^2}$$

igualando los numeradores:

$$8x^3+16x=Cx^3+Dx^2+(A+4C)x+B+4D$$

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$C=8$
$D=0$
$A+4C=16$
$B+4D=0$

cuya solución es: $A=-16\quad B=0\quad C=8\quad D=0$

$$\int\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}dx=\int\left(\frac{Ax+B}{(x^2+4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\right)dx=\int\left(\frac{-16x+0}{(x^2+4)^2}+\frac{8x+0}{x^2+4}\right)dx$$

$$=-16\int\frac{xdx}{(x^2+4)^2}+8\int\frac{xdx}{x^2+4}=$$

para ambas integrales $v=x^2+4\quad dv=2xdx\quad xdx=\frac{dv}{2}$

$$=-\frac{16}{2}\int v^{-2}dv+\frac{8}{2}\int\frac{dv}{v}=-8\left(\frac{v^{-1}}{-1}\right)+4\ln v=\frac{8}{v}+4\ln v$$

$$=\frac{8}{x^2+4}+4\ln\left(x^2+4\right)$$

Finalmente el resultado queda así:

$$\int\frac{8x^3+16x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{8}{x^2+4}+4\ln\left(x^2+4\right)+C$$

8. $\int\frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}dx$

Se observa que el término cuadrático es repetible, por lo que empleando fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(4x^2+9\right)^2}+\frac{Cx+D}{4x^2+9}$$

$$=\frac{Ax+B+(Cx+D)\left(4x^2+9\right)}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{Ax+B+4Cx^3+9Cx+4Dx^2+9D}{\left(4x^2+9\right)^2}=\frac{4Cx^3+4Dx^2+(A+9C)x+B+9D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$igualando\ los\ numeradores$:

$$8x^2+5x+18\ =\ 4Cx^3+4Dx^2+(A+9C)x+B+9D$$

$obtenemos\ el\ siguiente\ sistema\ de\ ecuaciones$:

$4C=0$

$4D=8$

$A+9C=5$

$B + 9D = 18$

$cuya\ solución\ al\ sistema\ es: \quad A = 5 \quad B = 0 \quad C = 0 \quad D = 2$

$$\int \frac{8x^2 + 5x + 18}{(4x^2 + 9)^2} dx = \int \left(\frac{Ax + B}{(4x^2 + 9)^2} + \frac{Cx + D}{4x^2 + 9} \right) dx = \int \left(\frac{5x + 0}{(4x^2 + 9)^2} + \frac{0x + 2}{4x^2 + 9} \right) dx$$

$$= 5 \int \frac{xdx}{(4x^2 + 9)^2} + 2 \int \frac{dx}{4x^2 + 9}$$

$para\ la\ primera\ integral \quad v = 4x^2 + 9 \quad dv = 8x\, dx$

$para\ la\ segunda\ integral\ aplicar\ (19) \quad v^2 = 4x^2 \ \ v = 2x \quad a^2 = 9 \ \ a = 3$

$$= 5\frac{1}{8} \int \frac{dv}{v^2} + 2\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 + a^2}$$

$$= \frac{5}{8} \int v^{-2} dv + \int \frac{dv}{v^2 + a^2}$$

$$= \frac{5}{8}(-\frac{1}{v}) + \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C$$

$$= -\frac{5}{8(4x^2 + 9)^2} + \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

Finalmente el resultado es:

$$\int \frac{8x^2 + 5x + 18}{(4x^2 + 9)^2} dx = -\frac{5}{8(4x^2 + 9)} + \frac{1}{3} arc\tan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

1.10. Integración por sustitución trigonométrica

Este método consiste en llevar a cabo un cambio de variable mediante funciones trigonométricas.

Existen integrales cuyo integrando contiene expresiones de la forma:

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 + a^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$

Integrales con la expresión:

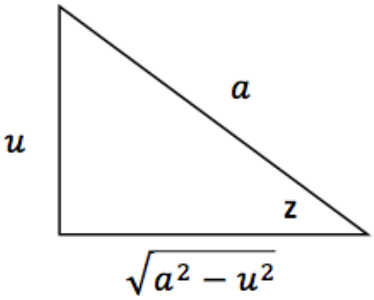
$\boldsymbol{\sqrt{a^2 - u^2}}$

Hacer el siguiente cambio de variable

$$\boldsymbol{u = a\, sen\, z \quad \therefore \quad du = a\cos z dz}$$

Sustituyendo en la expresión

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2 z} = \sqrt{a^2(1 - sen^2 z)} = \sqrt{a^2 cos^2 z} = \mathbf{a\cos z}$$



Este resultado simplificará el proceso de integración.

Integrales con la expresión:

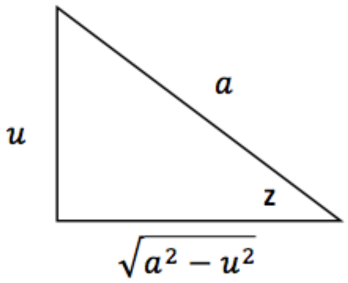
$\sqrt{u^2 + a^2}$

Hacer el siguiente cambio de variable:

$u = a\, tan\, z \quad \therefore \quad du = a\, sec^2 z\, dz$

Sustituyendo en la expresión

$\sqrt{u^2 + a^2} = \sqrt{a^2 tan^2 z + a^2} = \sqrt{a^2 (tan^2 z + 1)} = \sqrt{a^2 sec^2 z} = \mathbf{a sec\, z}$



Este resultado simplificará el proceso de integración.

Integrales con la expresión:

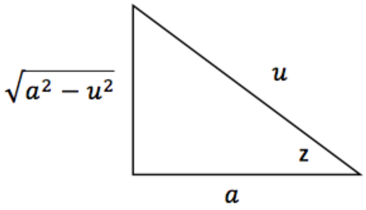
$\sqrt{u^2 - a^2}$

Hacer el siguiente cambio de variable:

$u = a\, sec\, z \quad \therefore \quad du = a\, sec\, z\, tan\, z\, dz$

Sustituyendo en la expresión

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 sec^2 z - a^2} = \sqrt{a^2\left(sec^2 z - 1\right)} = \sqrt{a^2 tan^2 z} = \boldsymbol{a}\mathbf{tan}\ \boldsymbol{z}$$



Este resultado simplificará el proceso de integración.

Veamos algunos ejemplos:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}}$

El integrando contiene la expresión: $\sqrt{x^2+36}$

$$sea\ \ u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x \quad y \quad a^2 = 36 \quad \therefore \quad a = 6$$

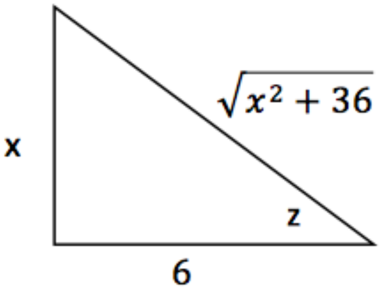
$$aplicando \quad u = a\tan z$$

$$x = 6\tan z \rightarrow \quad dx = 6\ sec^2 z\ dz \quad \sqrt{x^2 + 36} = 6\sec z$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}} = \int \frac{6\ sec^2 z\ dz}{6\tan z(6\sec z)} = \int \frac{\sec z}{6\tan z} dz = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{\cos z}}{\frac{sen\ z}{\cos z}} dz = \frac{1}{6}\int \csc z\ dz$$

$$= \frac{1}{6} \ln (\csc z - \cot z)$$

Para regresar el cambio de variable nos apoyamos con el siguiente triángulo:



$$\csc z = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{x} \qquad \cot z = \frac{6}{x}$$

$$= \frac{1}{6} \ln (\csc z - \cot z) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 36}}{x} - \frac{6}{x} \right)$$

Finalmente el resultado es:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 36} - 6}{x} \right) + C$$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

El integrando contiene la expresión: $\sqrt{16 - x^2}$

$$sea \quad u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x \quad y \quad a^2 = 16 \quad \therefore \quad a = 4$$

$$aplicando \quad u = a\, sen\, z$$

$$x = 4\, sen\, z \quad \rightarrow \quad dx = 4\cos z\, dz \qquad \sqrt{16 - x^2} = 4\cos z$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx = \int \frac{16\, sen^2 z}{4\cos z}(4\cos z)dz = 16\int sen^2 z dz$$

Aplicando identidad…

$$= 16\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z\right)dz = \frac{16}{2}\int dz - \frac{16}{2}\int \cos(2z)dz$$

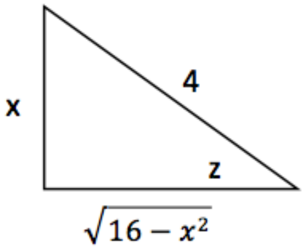
$$hacer \quad v = 2z \rightarrow dv = 2dz$$

$$= 8z - \frac{8}{2}\int \cos v\, dv = 8z - 4sen\, v = 8z - 4sen\,(2z)$$

$$aplicando\ la\ identidad: \quad 2\, sen\, z\cos z = sen\, 2z$$

$$= 8z - 4(2\, sen\, z\cos z) = 8(z - sen\, z\cos z)$$

Para regresar el cambio de variable nos apoyamos con el siguiente triángulo:



$$sen\, z = \frac{x}{4} \qquad \cos z = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$$

$$= 8(z - sen\, z\cos z)$$

$$= 8\left(arc\ sen\frac{x}{4} - \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}\right)\right)$$

$$= 8\ arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$$

Finalmente el resultado es:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx = 8\ arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 7}}$

El integrando contiene la expresión: $\sqrt{x^2 - 7}$

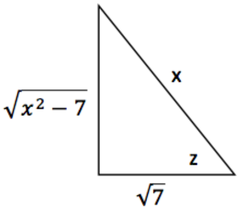
$$sea\ \ u^2 = x^2 \ \therefore\ \ u = x \quad y \quad a^2 = 7 \ \therefore\ \ a = \sqrt{7}$$

$$aplicando \quad u = a\sec z$$

$$x = \sqrt{7}\sec z \ \rightarrow\ dx = \sqrt{7}\sec z\tan z\, dz \qquad \sqrt{x^2 - 7} = \sqrt{7}\tan z$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}} = \int \frac{\sqrt{7}\bullet z \bullet \tan(z) \bullet dz}{7\sec^2(z) \bullet \sqrt{7}\tan(z)} = \frac{1}{7}\int \frac{dz}{\sec(z)} = \frac{1}{7} sen(z) + c$$

Para regresar el cambio de variable nos apoyamos con el siguiente triángulo:



$$sen\, z = \frac{\sqrt{x^2-7}}{x}$$

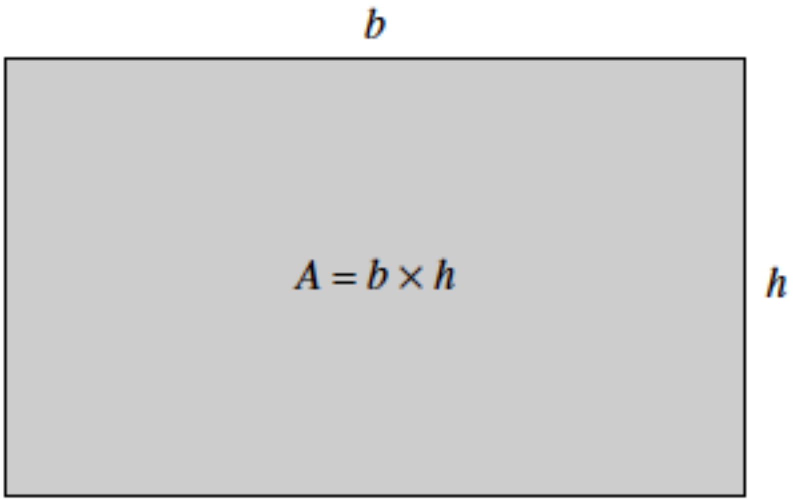
$$= \frac{1}{7} sen\, z = \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{x^2-7}}{x}\right)$$

Finalmente el resultado es:

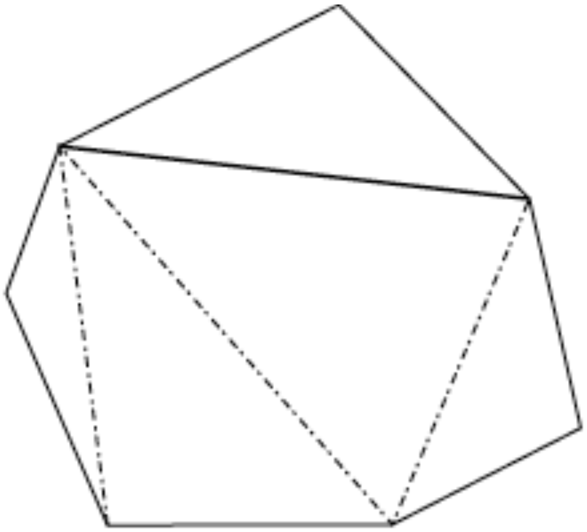
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}} = \frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + C$$

11. El concepto de área

Tenemos una idea intuitiva del área. Es una medida que nos dice sobre el tamaño de una región que es "La parte de un plano" encerrado por una curva cerrada. Desde la época de los antiguos griegos, los matemáticos han intentado calcular áreas de regiones planas. La región más básica es el plano ¿Es el rectángulo cuya área es el producto: base por altura ?



Los antiguos griegos utilizaron la geometría euclidiana para calcular las áreas de paralelogramos y triangulos. También sabían cómo calcular el área de cualquier polígono dividiéndolo en Triángulos a los planos. Sabemos que el área de un triángulo viene dada por $A = \frac{1}{2}bh$.

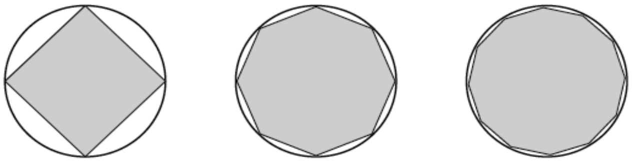


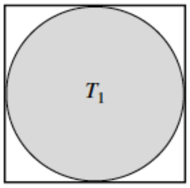
Aquí definimos el área de una región de un plano, donde la región está limitada por una curva. Para ello, debe entender que el área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de triángulos en la que se descompone, y se puede demostrar que el área así obtenida es independiente de como se descompone el polígono en triángulos.

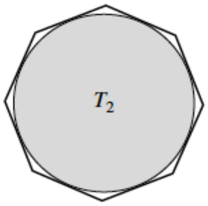
Cuando consideramos una región con un límite curvo, el problema de asignar el área es más difícil, fue Arquímedes (alrededor de 287-212 aC), quien proporcionó la clave para una solución por ingenioso uso del "método de agotamiento". Con este método, he encontrado el área de regiones complejas, mediante la inscripción de polígonos más grandes y más grandes de área conocida en tal región de modo que eventualmente sería "agotado".

Los polígonos circunscritos. Es el historico que da origen a la definición moderna de área derivida de Archimedes. El método de agotamiento es un tributo a su genio.

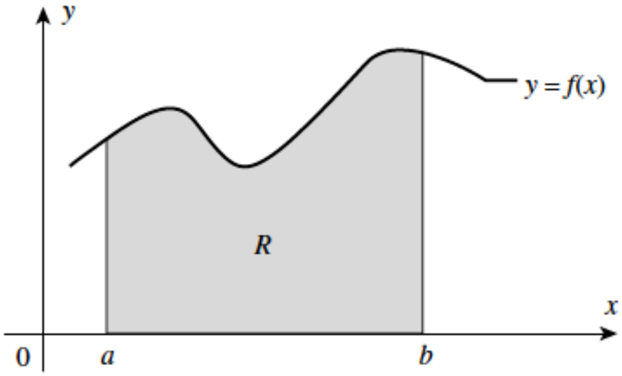
Aquí, utilizaremos el problema del área calculada para motivar la definición que llamaremos integral definida de una función continua. Entonces, usaremos la integral definida para calcular el área de una región. Finalmente, el teorema fundamental del cálculo integral proporcionar un método simple de calcular muchas integrales definidas, en términos de números que pueden representar varias cantidades.

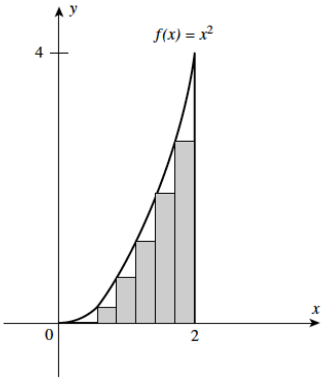


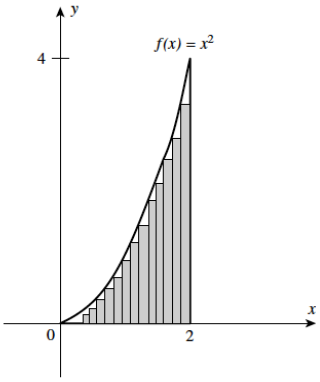




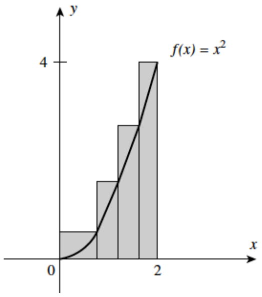
Consideremos ahora una región en el plano como se muestra en seguida. Está limitado por el eje x, las líneas X=a y x=b, y la curva que tiene la ecuación y=f(x), donde f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b].

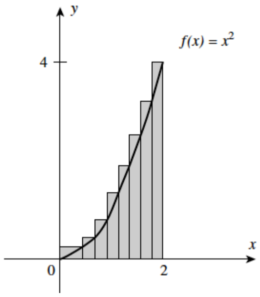






Podemos definir una región poligonal contenida en R. Para este propósito, inscribimos rectángulos en la región R, como se muestra en figura de arriba. Entonces la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área de R. O la suma de las areas es mayor para rectangulos como los sigueintes.

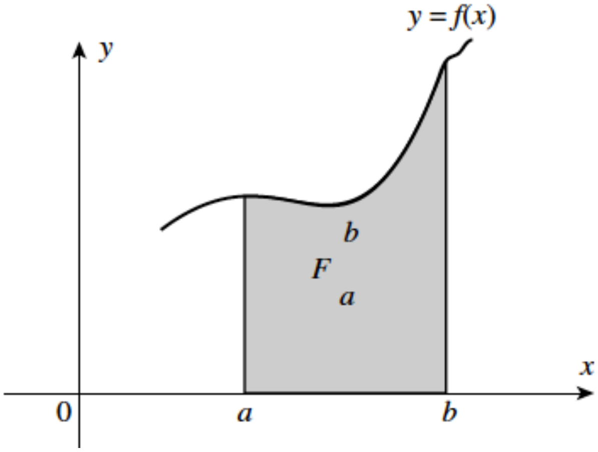




Una observación crucial para hacer sobre este proceso es que a medida que las bases de los rectángulos se hacen más pequeños y más pequeños, la suma de las áreas de los rectángulos parece acercarse al área exacta de R. Esto sugiere que el área de R debe definirse como el límite Δx que tienden a cero, de la suma de las áreas de rectángulos inscritos o circunscritos. Nuestra definición de área se basará en esta idea. Δx es la base del rectangulo y las halturas h=f(x). Nuestra afirmación hasta ahora sobre el área de R se ha apoyado en las siguientes tres propiedades básicas que esperamos que el área posea:

(1) Las propiedades rectángulo: El área de un rectángulo es el producto de su base y altura (esta propiedad se trata como la definición de área de un rectángulo).
(2) Las propiedades de la adición: El área de una región compuesta de varias regiones más pequeñas que se superponen en un segmento de línea como máximo es la suma de las áreas de la menor regiones.
(3) La propiedad de comparación: El área de una región que contiene una segunda región es al menos tan grande como el área de la segunda región.
Es importante entender dónde se empleó cada una de estas propiedades en la discusión anterior. Ellas jugarán un papel importante en la definición del área a ser discutida.

Considere una función y=f(x) que es continua y positiva en un intervalo cerrado [a, b]. Pensamos en la función representada por una curva y consideramos el área de la región que está limitada por la curva, a los lados por las rectas x=a y x=b y por debajo por la porción del eje x entre los puntos a y b.



Que haya un significado definido al hablar del área de esta región es una suposición inspirada por la intuición. Denotamos el área de esta región por F_a^b y la llamamos la integral definida de la función f(x) entre los límites a y b. Cuando en realidad buscamos asignar un valor numérico a esta área, encontramos que, en general, no podemos medir áreas de tales regiones con límites curvos. Sin embargo, hay una salida. Adoptamos un método (basado en el método de agotamiento de Arquímedes), que como vemos se aplica a regiones más complejas. El método implica la suma de las áreas de rectángulos infinitesimales por debajo de cada punto de la curva, curva formada por puntos que pertenecen a un lado de un polígono regular de n número de lados: círculo.

Definición: Sea f constante y no negativo en [a, b], y sea R la región limitada por la gráfica de f, por debajo del eje x de izquierda a derecha por las líneas x=a y x=b. Entonces, llamamos a R la región entre la gráfica de f y el eje x en [a, b], y el área de R se define por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Si f está limitada en [a, b] y si es continua allí en un número finito de puntos, entonces f es integrable en [a, b].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

12. Teorema fundamental del cálculo

Hasta ahora, los procesos limitantes de la derivada y de la integral definida han sido considerados como conceptos distintos. Ahora reuniremos estas ideas fundamentales y estableceremos la relación que existe entre ellas. Como resultado, las integrales definidas pueden ser evaluadas de manera más eficiente.

Hemos definido la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

como el límite de una suma y ha tenido aplicación práctica en la estimación de la integral. El cálculo de integrales definidas de esta maner siempre es tedioso, generalmente difícil, y aveces imposible.

Como la evaluación de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

tiene una gran variedad de aplicaciones importantes, es altamente deseable tener una manera fácil de calcular a

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Para tal propósito de aquí se desarrollar un método general para evaluar de una manera muy simple. A partir de la definición de la función de área A(x), declaramos sus dos propiedades inmediatamente:

$A(a) = \int_a^a f(x)\,dx$, Ya no hay área en a porque $\Delta x = 0$.

$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, representa el área de entre a y b.

El terorema fundamental del cálculo nos dice

$$\int_a^b f(x)\,dx = f'(b) - f'(c)$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\left[\int_a^x f(x)\mathbf{d}x\right] = f(x)$$

Es decir la integral es la antiderivada.

Por ejemplo, dada

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^x = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right] = x^3$$

Ejercicios resueltos de técnicas de integración

1.- $\int \frac{1}{\sqrt{x}+9}dx$

Solución:

Para la función $\frac{1}{\sqrt{x}+9}$, sustituimos $u=\sqrt{x}$, y $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=2\int \frac{u}{u+9}du$

para la integral $\frac{u}{u+9}$, la dividamos:

$=2\int \left(1-\frac{9}{u+9}\right)du$

Las integral la resolvemos como sumas de integrales:

$=-18\int \frac{1}{u+9}du+2\int 1du$

Para la integral $\frac{1}{u+9}$, substituimos s=u+9 y ds=du:

$$=-18\int\frac{1}{s}ds+2\int 1du$$

Integramos $\frac{1}{s}$ como log(s):

$$=-18\log(s)+2\int 1du$$

La integral de la contante:

$$=2u-18\log(s)+C$$

Sustituimos para s=u+9:

$$=2u-18\log(u+9)+C$$

Substituimos para $u=\sqrt{x}$:

$$=2\sqrt{x}-18\log(\sqrt{x}+9)+C$$

Por tanto la solución es:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+9}\,dx=2(\sqrt{x}-9\log(\sqrt{x}+9)+C$$

2. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

Solución:

Para la integral $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, subtituimos $u=x^2+4$, y $du=2x\,dx$:

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

Pala integral de $\frac{1}{\sqrt{u}}$, es $2\sqrt{u}$:

$= \sqrt{u} + C$

Sustituyendo $u = x^2 + 4$, por tanto la solución es:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx = \sqrt{x^2+4} + C$$

3. $\int e^{\sqrt{x+1}}\ dx$

Solución:

Para la función $e^{\sqrt{x+1}}$, subtituimos u=x+1 y du=dx:

$= \int e^{\sqrt{u}} du$

Para integrar $e^{\sqrt{u}}$, substituimos $s = \sqrt{u}$, y $ds = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$:

$= 2\int e^s s\, ds$

Para integrar $e^s s$, se hara por partes, $\int f\, dg = fg - \int g\, df$, por tanto:

$f = s, \quad dg = e^s ds,$

$df = ds, \quad g = e^s$

$= 2e^s s - 2\int e^s\ ds$

Integrando e^s:

$= 2e^s s - 2e^s + C$

Sustituyendo $s = \sqrt{u}$:

$= 2e^{\sqrt{u}}\sqrt{u} - 2e^{\sqrt{u}} + C$

Sustituyendo u=x+1:

$= 2e^{\sqrt{x+1}}\sqrt{x+1} - 2e^{\sqrt{x+1}} + C$

por tanto la solución es:

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\ dx = 2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)+C$$

$$4.\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

Sustituyendo

$$x = 2\tan(u)\ \ y\ \ dx = 2\sec^2(u)du$$

Entonces

$$\int \frac{2\sec^2 u}{\sqrt{4\tan^2 u+4}}du \rightarrow 2\int \frac{\sec u\, du}{2} \rightarrow \int \sec u du$$

Multiplicando numerador y denominador de sec(u) por tan(u) +sec(u)

$$\int \frac{\sec^2 u+(\sec u)(\tan u)}{\sec u+\tan u}du \quad sustituyendo\ s=\tan u+\sec u\ \ y\ \ ds=\sec^2 u+(\sec u)(\tan u)du$$

Entonces

$$\int \frac{1}{s}ds \rightarrow \log(s)+C$$

ahora sustituyendo s

$$\log(\tan u+\sec u)+C$$

tenemos sustituyendo u tenemos

$$\log(\tan(\tan^{-1}(\frac{x}{2}))+\sec(\tan^{-1}(\frac{x}{2})))+C$$

$$5.\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

Sustituyendo

$$x = 2\tan u\ \ y\ \ dx = 2\sec^2 udu$$

entonces tenemos

$$2\int \frac{\cos^2 u}{16}du \rightarrow \frac{1}{8}\int \cos^2 u du$$

escribiendo

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}$$

entonces

$$\frac{1}{8}\int (\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2})du$$

integrando la suma termino a termino

$$\frac{1}{16}\int \cos(2u)du + \frac{1}{16}\int 1du$$

sustituyendo en la primer integral

$$s = 2u \quad y \quad ds = 2du$$

entonces

$$\frac{1}{32}\int \cos(s)ds + \frac{1}{16}\int 1du \rightarrow \frac{\sin(s)}{32} + \frac{u}{16} + C$$

sustituyendo (s) y (u)

$$\frac{\sin(2u)}{32} + \frac{u}{16} + C \rightarrow \frac{(x^2+4)\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + 2x}{16(x^2+4)} + C$$

$$6.\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$$

Haciendo división larga

$$\int (1 - \frac{4}{x^2+4})dx \rightarrow \int dx - 4\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

Sacando el factor 4 desde el denominador

$$\int dx - 4\int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}dx \rightarrow \int dx - \int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx$$

Para la segunda integral sustituir

$$u=\frac{x}{2} \quad y \quad du=\frac{1}{2}$$

Entonces

$$\int dx-2\int\frac{1}{u^2+1}dx$$

Integrando

$$x-2\tan^{-1}u+C \quad sustituyendo\,(u)\rightarrow x-2\tan^{-1}(\frac{x}{2})+C$$

$$7.\int\frac{x^2+4}{x^2}dx$$

Al separar la fracción

$$4\int\frac{1}{x^2}dx+\int dx$$

Integrando

$$x-\frac{4}{x}+C$$

$$8.\int\frac{3x-1}{x(x^2-4)}dx$$

Usando fracciones parciales

$$\int(\frac{1}{4x}-\frac{7}{8(x+2)}+\frac{5}{8(x-2)})dx$$

Integrando la suma termino a término y sacando factores

$$-\frac{7}{8}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{8}\int\frac{dx}{x-2}$$

Para la primer integral sustituir

$$u=x+2 \quad y \quad du=dx$$

y para la tercera integral sustituir

$$s=x-2 \quad y \quad ds=dx$$

$$-\frac{7}{8}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{8}\int\frac{ds}{s}$$

ahora integrando

$$\frac{5\log(s)}{8}-\frac{7\log(u)}{8}+\frac{\log(x)}{4}+C$$

Sustituyendo (u) y (s)

$$\frac{5\log(x-2)}{8}-\frac{7\log(x+2)}{8}+\frac{\log(x)}{4}+C$$

$$9.\int\frac{x-5}{x^2+4}dx$$

Separando la fracción y sacando los factores

$$\int\frac{x}{x^2+4}dx-5\int\frac{dx}{x^2+4}$$

Para la primer integral sustituir

$u=x^2+4 \;\; y \;\; du=2xdx$

y sacando el factor 4 de la segunda integral

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}$$

Entonces sustituir para la segunda integral

$$s=\frac{x}{2} \;\; y \;\; ds=\frac{1}{2}dx$$

Obtenemos

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{2}\int\frac{ds}{s^2+1}$$

Integrando

$$\frac{\log(u)}{2}-\frac{5}{2}\tan^{-1}(s)+C$$

Sustituyendo (u) y (s)

$$\frac{1}{2}\left[\log(x^2+4)-5\tan^{-1}(\frac{x}{2})\right]+C$$

$$10.\int \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x}dx$$

Sustituyendo

$$u=\sqrt[3]{x+27} \quad y \quad du=\frac{dx}{3(x+27)^{2/3}}$$

Entonces

$$3\int \frac{u^3}{u^3-27}du$$

factorizando el denominador

$$3\int \frac{u^3}{(u-3)(u^2+3u+9)}du$$

haciendo división larga

$$3\int (\frac{-u-6}{u^2+3u+9}+\frac{1}{u-3}+1)du$$

integrando a la suma termino a termino

$$3\int \frac{-u-6}{u^2+3u+9}du+3\int \frac{1}{u-3}du+3\int du$$

reescribiendo

$$\frac{-u-6}{u^2+3u+9}=-\frac{2u+3}{2(u^2+3u+9)}-\frac{9}{2(u^2+3u+9)}$$

Entonces

$$3\int (-\frac{2u+3}{2(u^2+3u+9)}-\frac{9}{2(u^2+3u+9)})du+3\int \frac{1}{u-3}du+3\int du$$

integrando a la suma termino a término y sacando factores

$$-\frac{3}{2}\int \frac{2u+3}{u^2+3u+9}du-\frac{27}{2}\int \frac{1}{u^2+3u+9}du+3\int \frac{1}{u-3}du+3\int du$$

para la primer integral sustituir

$$s=u^2+3u+9 \quad y \quad ds=(2u+3)du$$

entonces

$$-\frac{3}{2}\int\frac{1}{s}\,ds-\frac{27}{2}\int\frac{1}{u^2+3u+9}\,du+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du\rightarrow-\frac{3\log(s)}{2}-\frac{27}{2}\int\frac{1}{u^2+3u+9}\,du+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

Para la segunda integral completar el cuadrado

$$-\frac{3\log(s)}{2}-\frac{27}{2}\int\frac{1}{(u+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}}\,du+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

Sustituir

$$p=u+\frac{3}{2}\quad y\quad dp=du$$

entonces

$$-\frac{3\log(s)}{2}-\frac{27}{2}\int\frac{1}{p^2+\frac{27}{4}}\,dp+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

Sacando el factor 27/4 del denominador

$$-\frac{3\log(s)}{2}-\frac{27}{2}\int\frac{4}{27(\frac{4p^2}{27}+1)}\,dp+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

Sacando los factores constantes

$$-\frac{3\log(s)}{2}-2\int\frac{1}{\frac{4p^2}{27}+1}\,dp+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

Sustituyendo

$$w=\frac{2p}{3\sqrt{3}}\quad y\quad dw=\frac{2}{3\sqrt{3}}\,dp$$

Entonces

$$-\frac{3\log(s)}{2}-3\sqrt{3}\int\frac{1}{w^2+1}\,dw+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

integrando

$$-3\sqrt{3}\tan^{-1}(w)-\frac{3\log(s)}{2}+3\int\frac{1}{u-3}du+3\int du$$

para la tercer integral sustituir

$$v=u-3\quad y\quad dv=du$$

entonces

$$-3\sqrt{3}\tan^{-1}(w)-\frac{3\log(s)}{2}+3\int\frac{1}{v}dv+3\int du$$

integrando lo restante+C

$$-3\sqrt{3}\tan^{-1}(w)-\frac{3\log(s)}{2}+3\log(v)+3u+C$$

sustituyendo (u), (v), (w), (p)

$$3\sqrt[3]{x+27}+3\log(3-\sqrt[3]{x+27})-\frac{3}{2}\log\left[(x+27)^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{x+27}+9\right]-3\sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{2\sqrt[3]{x+27}+3}{3\sqrt{3}})+C$$

$$11.\int\frac{(\ln x)^9}{x}dx$$

Sustituir

$$u=\log x \quad y \quad du=\frac{1}{x}dx$$

Entonces

$$\int u^9 du$$

integrando

$$\frac{u^{10}}{10}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{(\log x)^{10}}{10}+C$$

$$12.\int(\ln 3x)^2 dx$$

Integrando por partes donde

$$f=\log^2 3x,\ \ dg=dx$$

$$df=\frac{2\log(3x)}{x},\qquad g=x$$

Entonces

$$-2x\log(3x)-2\int\log(3x)dx$$

Nuevamente integrando por partes donde

$$f = \log\ 3x,\ \ dg = dx$$

$$df = \frac{1}{x}dx, \quad g = x$$

Entonces

$$-2x\log(3x) + x\log^2(3x) + 2\int dx \rightarrow -2x\log(3x) + x\log^2(3x) + 2x + C$$

$$13. \int t\, sen^{-1}(t)dt$$

Integrando por partes donde

$$f = sen^{-1}t,\ \ dg = tdt$$

$$df = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad g = \frac{t^2}{2}$$

entonces

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Para la integral sustituir

$$t = sen(u) \ \ y \ \ dt = \cos(u)du$$

entonces

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t - \frac{1}{2}\int sen^2 u du$$

Escribir $sen^2 u$ como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)$ entonces

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t - \frac{1}{2}\int [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)]du$$

Integrando la suma parte por parte

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t + \frac{1}{4}\int \cos(2u)du - \frac{1}{4}\int du$$

integrando

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t + \frac{sen(2u)}{8} - \frac{u}{4} + C$$

sustituyendo (u) donde

$$u = sen^{-1}t$$

$$\frac{1}{2}t^2 sen^{-1}t+\frac{sen(2sen^{-1}t)}{8}-\frac{sen^{-1}t}{4}+C$$

$$14.\int\frac{\ln x}{(x-1)^2}dx\rightarrow\log(1-x)+\frac{x\log(x)}{1-x}+C$$

$$15.\int(x+1)^3(x-2)dx$$

Expandiendo la integral multiplicando tenemos

$$\int(x^4+x^3-3x^2-5x-2)dx$$

Integrando la suma termino a término y sacando factores constantes

$$\int x^4dx+\int x^3dx-3\int x^2dx-5\int xdx-2\int dx$$

Integrando

$$\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{5x^2}{2}-2x+C$$

$$16.\int\frac{1}{(x+1)^3(x-2)}dx$$

Usando fracciones parciales tenemos

$$\int(-\frac{1}{27(x+1)}-\frac{1}{9(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{1}{27(x+2)})dx$$

Integrando la suma termino a termino

$$-\frac{1}{27}\int\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{9}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x+1)^3}dx+\frac{1}{27}\int\frac{1}{(x+2)}dx$$

Integrando usando cambio de variable

$$-\frac{\log(x+1)}{27}+\frac{1}{9(x+1)}-\frac{1}{6(x+1)^2}+\frac{\log(x-2)}{27}+C$$

$$17.\int\ln(x^2+4)dx$$

Integrando por partes donde

$$f=\log(x^2+4),\ \ dg=dx$$

$$df=\frac{2x}{x^2+4}dx,\quad g=x$$

Entonces

$$x\log(x^2+4)-2\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$$

Haciendo división larga se tiene

$$x\log(x^2+4)-2\int(1-\frac{4}{x^2+4})dx\to x\log(x^2+4)-2\int dx+8\int\frac{1}{x^2+4}dx$$

Sacando el factor 4 del denominador

$$x\log(x^2+4)-2\int dx+2\int\frac{1}{(\frac{x^2}{4}+1)}dx$$

Sustituir

$$u=\frac{x}{2}\quad y\quad du=\frac{1}{2}dx$$

entonces

$$x\log(x^2+4)-2\int dx+4\int\frac{1}{u^2+1}du$$

integrando

$$4\tan^{-1}u+x\log(x^2+4)-2x+C$$

sustituyendo (u)

$$4\tan^{-1}(\frac{x}{2})+x\log(x^2+4)-2x+C$$

$$18.\int 8te^{2t^2}dt$$

Sustituir

$$u=2t^2\quad y\quad du=4tdt$$

Entonces

$$2\int e^u du\to 2e^u+C$$

sustituyendo (u)

$$2e^{2t^3}+C$$

$$19.\int \frac{1}{4x^4+10x^3+25x^2}dx$$

Usando fracciones parciales tenemos:

$$\int (\frac{1}{25x^2}+\frac{2}{125(x+5)}+\frac{1}{25(x+5)^2}-\frac{2}{125x})dx$$

Sacando constantes integrando termino a termino

$$\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x^2}-\frac{1}{125}\int \frac{dx}{x}+\frac{2}{125}\int \frac{dx}{(x+5)}+\frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x+5)^2}$$

Para las ultimas 2 integrales usar el cambio de variable donde

$$u=x+5 \quad y \quad du=dx$$

obteniendo

$$\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x^2}-\frac{1}{125}\int \frac{dx}{x}+\frac{2}{125}\int \frac{dx}{u}+\frac{1}{25}\int \frac{dx}{u^2}$$

integrando

$$+\frac{1}{25u}+\frac{2\log u}{125}-\frac{\log x}{125}+c$$

sustituyendo (u)

$$125(-\frac{5}{x}-\frac{5}{x+5}-2\log x+2\log(x+5))+C$$

$$20.\int \frac{1}{x^2+8x+25}dx$$

Completando el cuadrado

$$\int \frac{1}{(x+4)^2+9}dx$$

Sustituir

$$u=x+4 \quad y \quad du=dx$$

entonces

$$\int \frac{1}{u^2+9}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{du}{\frac{u^2}{9}+1}$$

Sustituir $s = \frac{u^2}{3} \quad y \quad ds = \frac{du}{3}$

entonces

$$\frac{1}{3}\int \frac{ds}{s^2+1} \rightarrow \frac{1}{3}\tan^{-1} s + C$$

Sustituyendo (u) y (s) tenemos

$$\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x+4}{3})+C$$

$$21.\int \frac{x}{x^3+3x^2-9x-27}dx$$

Cancelando términos comunes en numerador y denominador

$$\int \frac{x}{(x-3)(x+3)^2}dx$$

Usando fracciones parciales tenemos:

$$\int \left[-\frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{2(x+3)^2} + \frac{1}{12(x-3)} \right] dx$$

Integrando la suma termino a termino y sacando factores constantes

$$-\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+3)^2}dx + \frac{1}{12}\int \frac{1}{x-3}dx$$

Para las primeras dos integrales usar el cambio de variable donde

$$u = x+3 \quad y \quad du = dx$$

y para la ultima integral utilizar el cambio de variable donde

$$s = x-3 \quad y \quad ds = dx$$

Entonces

$$-\frac{1}{12}\int \frac{1}{u}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}dx + \frac{1}{12}\int \frac{1}{s}dx$$

integrando

$$-\frac{\log u}{12} + \frac{1}{2u} + \frac{\log s}{12} + C$$

Sustituyendo (s) y (u)

simplificando

$$\frac{1}{12}\left[-\frac{6}{x+3}+\log(3-x)-\log(x+3)\right]+C$$

$$22.\int e^{3x}sen(4x)dx$$

$$\frac{1}{25}e^{3x}(3sen(4x)-4\cos(4x)+c$$

$$23.\int\frac{sen^2 t}{\cos^2 t}dt=\int\tan^2 tdt$$

Escribir

$\tan^2 t \ \ como \ \ \sec^2 t-1$

entonces

$$\int(\sec^2 t-1)dt\rightarrow\int\sec^2 tdt-\int dt$$

Integrando

$$\tan t-t+C$$

$$24.\int\frac{sen^3 t}{(\cos t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

Usando la identidad

$sen^2 t=1-\cos^2 t$

entonces

$$\int\frac{sen\,t(1-\cos^2 t)}{(\cos t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

sustituir

$u=\cos t \quad y \quad du=-sen\,t$

entonces

$$-\int\frac{1-u^2}{u^{3/2}}du$$

Sustituir

$$s=\sqrt{u} \quad y \quad ds=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

entonces

$$-2\int\frac{1-s^4}{s^2}ds \rightarrow 2\int s^2ds-2\int\frac{1}{s^2}ds \rightarrow \frac{2s^3}{3}+\frac{2}{s}+C$$

sustituyendo (s) y (u)

$$\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}t+\frac{2}{\sqrt{\cos t}}+C$$

$$25.\int\tan^{10}x\sec^4 xdx$$

Usar la identidad trigonométrica

$$\sec^2 x=\tan^2 x+1$$

entonces

$$\int\tan^{10}x(\tan^2 x+1)\sec^2 xdx$$

Sustituir

$$u=\tan x \quad y \quad du=\sec^2 x$$

entonces

$$\int u^{10}(u^2+1)du \rightarrow \int u^{12}du+\int u^{10}du \rightarrow \frac{u^{13}}{13}+\frac{u^{11}}{11}+C$$

Sustituyendo (u)

$$\frac{\tan^{13}x}{13}+\frac{\tan^{11}x}{11}+C$$

$$26.\int\frac{x\tan x}{\cos x}dx$$

Tomar la integral

$$\int x\tan x\sec xdx$$

luego integrar por partes

Donde

$$f = x \qquad dg = \tan x \sec x dx$$
$$df = dx \qquad g = \sec x$$

entonces

$$x\sec x - \int \sec x dx$$

Multiplicar denominador y numerador de la integral por

$$\tan x + \sec x$$

Entonces

$$x\sec x - \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

Sustituir

$$u = \tan x + \sec x \quad y \quad du = \sec^2 x + \tan x \sec x dx$$

Integrar

$$x\sec x - \int \frac{du}{u} \quad \to \quad x\sec x - \log u$$

Sustituyendo (u)

$$x\sec x - \log(\tan x + \sec x) + C$$

$$27.\int y\cos y dy$$

Integrar por partes donde

$$f = y \quad dg = \cos y$$
$$df = dy \quad g = sen\ y$$

Entonces

$$ysen\ y - \int sen\ ydy \ \to \ ysen\ y + \cos y + C$$

$$28.\int x^2 sen(x^3)dx$$

Sustituir

$$u = x^3 \quad y \quad du = 3x^2$$

entonces

$$\frac{1}{3}\int sen(u)du \to -\frac{\cos u}{3} + C$$

Sustituyendo (u)

$$-\frac{\cos(x^3)}{3}+C$$

$$29.\int(1+sen^2t)\cos^3 tdt$$

Usar la identidad trigonométrica

$$1-\cos^2 t = sen^2t$$

Entonces

$$\int(1+sen^2t)(1-sen^2t)\cos tdt$$

Sustituir

$$u = sen\,t \quad y \quad du = \cos t$$

Entonces

$$\int(1+u^2)(1-u^2)du \to \int(1-u^4)du \to \int du - \int u^4 du$$

Integrando

$$u-\frac{u^5}{5}+C$$

sustituyendo (u)

$$sen\,t-\frac{sen^5t}{5}+C$$

$$30.\int\frac{\sec^3 x}{\tan x}dx$$

Tomar la integral

$$\int\csc x\sec^2 xdx$$

usar la identidad trigonométrica

$$\sec^2 x = \tan^2 x+1$$

Entonces

$$\int\csc x(\tan^2 x+1)dx \to \int\tan x\sec xdx+\int\csc xdx$$

Reescribir la primera integral en términos de seno y coseno

$$\int\frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx+\int\csc xdx$$

Sustituir

$u = \cos x \quad y \quad du = -sen\, x\, dx$

entonces

$$-\int \frac{1}{u^2} du + \int \csc x dx \rightarrow \frac{1}{u} + \int \csc x dx$$

Para la segunda integral multiplicar denominador y numerador por

$\cot x + \csc x$

Entonces

$$\frac{1}{u} + \int -\frac{-\cot x \csc x - \csc^2 x}{\cot x + \csc x} dx$$

sustituir

$s = \cot x + \csc x \quad y \quad ds = (-\csc^2 x - \cot x \csc x)dx$

entonces

sustituyendo (u) y (s)

$\sec x - \log(\cot x + \csc x) + C$

$31. \int e^w (1 + e^w)^5 dw$

Sustituir $u = e^w \quad y \quad du = e^w dw$ entonces

$$\int (u+1)^5 du$$

Sustituir

$s = u + 1 \quad y \quad ds = du$

Entonces

$$\int s^5 ds \rightarrow \frac{s^6}{6} + C$$

sustituyendo (s) y (u)

$$\frac{(e^w + 1)^6}{6} + C$$

$32. \int (x-1)e^{-x} dx$

Expandiendo la integral tenemos

$$\int -e^{-x} dx + \int e^{-x} x dx$$

para la primera integral

Hacer por partes donde

$$f=-e^{-x} \qquad dg=dx$$
$$df=e^{-x}dx \qquad g=x$$
entonces

$$-e^{-x}x-\int e^{-x}xdx+\int e^{-x}xdx$$
Las dos integrales restantes son iguales pero de diferente signo por lo tanto se cancelan

Dando como resultado

$$-e^{-x}x+C$$

$$33.\int \cot^3 4x\,dx$$

Sustituir

$$u=4x \quad y \quad du=4dx$$
entonces

$$\frac{1}{4}\int \cot^3 udu$$
Usando la fórmula de reducción resulta

$$-\frac{1}{8}\cot^2 u-\frac{1}{4}\int \cot udu$$
ahora reescribimos la cot en términos de sen y cos entonces

$$-\frac{1}{8}\cot^2 u-\frac{1}{4}\int \frac{\cos u}{senu}du$$
sustituir

$$s=sen\,u \quad y \quad ds=\cos udu$$
Entonces

$$-\frac{1}{8}\cot^2 u-\frac{1}{4}\int \frac{1}{s}ds \;\rightarrow -\frac{1}{8}\cot^2 u-\frac{\log s}{4}+C$$
Sustituyendo (s) y (u)

$$-\frac{1}{8}\cot^2 4x-\frac{\log(sen\,4x)}{4}+C$$

$$34.\int (3-\sec x)^2 dx$$
Expandiendo la integral

$$\int\left[\sec^2 x-6\sec x+9\right]dx \rightarrow \int\sec^2 xdx-6\int\sec xdx+9\int dx$$

Integrando

$$9x+\tan x-6\log(\tan x+\sec x)+C$$

$$35.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\tan xdx$$

Cambiar todo a sen y cos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} s\,en\,x\cos xdx$$

Sustituir

$$u=\cos x \quad y \quad du=-sen\,xdx$$

lo que nos produce un límite inferior

$$u=\cos(0)=1$$

Y un nuevo límite superior

$$u=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} udu$$

Multiplicamos el orden de los limites de integración ya que el inferior es mayor que el superior, entonces multiplicamos por -1 ,

Tenemos

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} udu$$

Integrando

$$\left.\frac{u^2}{2}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{1^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2=\frac{1}{4}$$

$$36.\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^4 x \tan x dx$$

No aparece con pasos intermedios así que la solución a la integral indefinida es

$$\frac{3}{8}\cos(2x)-\frac{1}{32}\cos(4x)-\log(\cos x)+C$$

y el resultado a la integral definida es:

$$\log(2)-\frac{33}{64}$$

$$37.\int \frac{sen\, x}{1+sen\, x}dx$$

Sustituir

$$u=\tan(\frac{x}{2}) \quad y \quad du=\frac{1}{2}dx\sec^2(\frac{x}{2})$$

luego transformamos la integral usando las sustituciones

$$sen\, x=\frac{2u}{u^2+1} \quad y \quad \cos x=\frac{1-u^2}{u^2+1} \quad y \quad dx=\frac{2du}{u^2+1}$$

Entonces

$$\int \frac{4u}{(u^2+1)^2(\frac{2u}{u^2+1}+1)}du$$

Simplificando

$$\int \frac{4u}{u^4+2u^3+2u^2+2u+1}du$$

Cancelando términos comunes

$$4\int \frac{u}{(u+1)^2(u^2+1)}du$$

usando fracciones parciales

$$4\int \left[\frac{1}{2(u^2+1)}-\frac{1}{2(u+1)^2}\right]du \rightarrow 2\int \frac{du}{u^2+1}-2\int \frac{du}{(u+1)^2}$$

Integrando

$$\frac{2}{u+1}+2\tan^{-1}u+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1}+2\tan^{-1}\left[\tan(\frac{x}{2})\right]+C$$

$$38.\int\frac{\cos x}{1+sen\,x}dx$$

Aplicando fracciones parciales

$$\int_0^1\left[-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx\rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+3}dx-\int_0^1\frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$$

Realizar el cambio de variable simple para cada integral y evaluar los nuevos limites donde

$u=x+3; s=x+2; p=x+1$

entonces

$$\frac{1}{2}\int_3^4\frac{1}{u}du-\int_2^3\frac{1}{s}ds+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{p}dp$$

Integrando

$$\left.\frac{\log u}{2}\right|_3^4+(-\log s)\Big|_2^3+\left.\frac{\log p}{2}\right|_1^2\rightarrow\frac{1}{2}\log(\frac{4}{3})-\log(\frac{3}{2})+\frac{\log(2)}{2}=\frac{1}{2}\log(\frac{32}{27})$$

$$39.\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$$

Aplicando fracciones parciales

$$\int_0^1\left[-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx\rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+3}dx-\int_0^1\frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$$

Realizar el cambio de variable simple para cada integral y evaluar los nuevos limites donde

$u=x+3; s=x+2; p=x+1$

entonces

$$\frac{1}{2}\int_3^4\frac{1}{u}du-\int_2^3\frac{1}{s}ds+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{p}dp$$

Integrando

$$\left.\frac{\log u}{2}\right|_{3}^{4}+\left.\left(-\log s\right)\right|_{2}^{3}+\left.\frac{\log p}{2}\right|_{1}^{2}\rightarrow\frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)-\log\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\log(2)}{2}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{32}{27}\right)$$

$$40.\int_{\ln 3}^{\ln 2}\sqrt{e^{x}+1}dx$$

Sustituir

$$u=e^{x}\quad y\quad du=e^{x}dx$$

Entonces

$$\int_{\ln 3}^{\ln 2}\frac{\sqrt{u+1}}{u}du$$

Sustituir

$$s=\sqrt{u+1}\quad y\quad ds=\frac{1}{2\sqrt{u+1}}du$$

entonces

$$2\int_{\ln 3}^{\ln 2}\frac{s^{2}}{s^{2}-1}ds$$

Haciendo división larga

$$\int_{\ln 3}^{\ln 2}\left[-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{2(s-1)}+1\right]ds\ \rightarrow-\int_{\ln 3}^{\ln 2}\frac{ds}{s+1}+\int_{\ln 3}^{\ln 2}\frac{ds}{s-1}+2\int_{\ln 3}^{\ln 2}ds$$

Hacer cambio de variable simple para integrar entonces

$$\left.(-\log(s+1)+\log(s-1)+2s)\right|_{\ln 3}^{\ln 2}$$

Regresando a términos de x

$$\left.(-\log(\sqrt{e^{x}+1}+1)+\log(\sqrt{e^{x}+1}-1)+2\sqrt{e^{x}+1})\right|_{\ln 3}^{\ln 2}$$

Evaluando los limites da ≈ -0.75424

$$41.\int e^{x}\cos(3x)dx$$

Hacer por partes donde

$$f=\cos(3x)\qquad dg=e^{x}dx$$

$$df=-3\sin(3x)dx\qquad g=e^{x}$$

Entonces

$$\int e^x \cos(3x)dx = e^x \cos(3x) + 3\int e^x \sin(3x)dx$$

Nuevamente integramos por partes donde

$$f = \sin(3x) \qquad dg = e^x dx$$

$$df = 3\cos(3x)dx \qquad g = e^x$$

entonces

$$\int e^x \cos(3x)dx = 3e^x \sin(3x) + e^x \cos(3x) - 9\int e^x \cos(3x)dx$$

la integral restante es idéntica a la original entonces las pasamos al mismo lado

$$10\int e^x \cos(3x)dx = 3e^x \sin(3x) + e^x \cos(3x)$$

finalmente despejando

$$\int e^x \cos(3x)dx = \frac{1}{10}\left[3e^x \sin(3x) + e^x \cos(3x)\right] + C$$

$$42. \int x(x-5)^9 dx$$

Sustituir

$$u = x - 5 \quad y \quad du = dx$$

Entonces

$$\int (u+5)u^9 du \;\rightarrow\; \int (u^{10} + 5u^9)du \;\rightarrow\; \int u^{10}du + 5\int u^9 du$$

integrando:

$$\frac{u^{11}}{11} + \frac{u^{10}}{2} + C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{(x-5)^{11}}{11} + \frac{(x-5)^{10}}{2} + C$$

$$43. \int \cos(\log t)dt$$

Sustituir

$$u = \log t \therefore t = e^u \quad y \; du = \frac{1}{t}dt \therefore e^u du = dt$$

Entonces

$$\int e^u \cos u du$$

para resolver esta integral usar la formula

$$\int e^{\alpha u}\cos(\beta u)du \;\; \rightarrow \;\; \frac{e^{\alpha u}(\alpha\cos(\beta u)+\beta\sin((\beta u))}{\alpha^2+\beta^2}$$

En este caso los coeficientes de u son 1 entonces sustituyendo (u)

$$\frac{1}{2}t(\sin(\log t)+\cos(\log t))+C$$

$$44.\int \sec^2 x\log(\tan x)dx$$

Sustituir

$$u=\tan x \quad y \quad du=\sec^2 xdx$$

entonces

$$\int \log(u)du$$

Integrar por partes donde

$$f=\log u \qquad dg=du$$

$$df=\frac{1}{u}du \qquad g=u$$

entonces

$$u\log u-\int du$$

Integrando:

$$u\log u-u+C \quad \rightarrow \quad \tan x\log(\tan x)-\tan x+C$$

$$45.\int \cos\sqrt{x}dx$$

Sustituyendo

$$u=\sqrt{x}\therefore x=u^2 \quad y \quad du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\therefore dx=2udu$$

Entonces

$$2\int u\cos udu$$

Integrando por partes donde:

$$f=u \qquad dg=\cos udu$$

$$df=du \qquad g=\sin u$$

Entonces

$$2u\sin u-2\int \sin u du \ \ \rightarrow \ \ 2u\sin u-2\cos u+C$$

sustituyendo (u)

$$2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-2\cos\sqrt{x}+C$$

$$46.\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

Sustituyendo

$$u=\sqrt{x}\therefore x=u^2 \quad y \quad du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\therefore dx=2udu$$

entonces s

$$2\int\cos udu \ \ \rightarrow \ \ 2\sin u+C$$

ustituyendo (u)

$$2\sin\sqrt{3}+C$$

$$47.\int\cos x\sin 2xdx$$

Usando la identidad trigonométrica donde

$$\sin 2x\cos x=\frac{1}{2}\left[\sin(x)+\sin(3x)\right]$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int\sin(3x)dx+\frac{1}{2}\int\sin x$$

sustituir

$$u=3x \quad y \quad du=3du$$

entonces

$$\frac{1}{6}\int\sin(u)du+\frac{1}{2}\int\sin x$$

integrando:

$$-\frac{\cos u}{6}-\frac{\cos x}{2}+C$$

sustituyendo (u)

$$-\frac{\cos 3x}{6}-\frac{\cos x}{2}+C$$

$$48.\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$

Escribir

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$$

y

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

Entonces

$$\int(\left[\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right])dx \quad \rightarrow \quad \int\cos 2xdx$$

Sustituir

$$u=2x \quad y \quad du=2du$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int\cos udu \quad \rightarrow \quad \frac{\sin u}{2}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{\sin 2x}{2}+C$$

$$49.\int\sqrt{x^2+2x+5}dx$$

Completando el cuadrado

$$\int\sqrt{(x+1)^2+4}dx$$

sustituir

$$u=x+1 \quad y \quad du=du$$

Entonces

$$\int \sqrt{u^2+4}dx$$

hacer el cambio trigonométrico

$$u = 2\tan s \quad y \quad du = 2\sec^2 sds$$

entonces

$$2\int 2\sec^3 sds \rightarrow 4\int \sec^3 sds$$

usando la fórmula de reducción para la secante obtenemos

$$2\tan s\sec s + 2\int \sec sds$$

integrando la ultima integral

$$2\tan s\sec s + 2\log(\tan s + \sec s) + C$$

Sustituyendo (s) y (u)

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4}(x+1) + 2\log\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{(x+1)^2+4}+1)\right] + C$$

$$50.\int \frac{1}{(8-2x-x^2)^{3/2}}dx$$

Completar el cuadrado

$$\int \frac{1}{(9-(x+1)^2)^{3/2}}dx$$

sustituir

$$u = x+1 \quad y \quad du = dx$$

Entonces

$$\int \frac{1}{(9-u^2)^{3/2}}du$$

realizar el cambio trigonométrico

$$u = 3\sin s \quad y \quad du = 3\cos sds \quad y \quad s = \sin^{-1}(\frac{u}{3})$$

entonces

$$3\int \frac{\sec^2 s}{27}ds \rightarrow \frac{1}{9}\int \sec^2 sds$$

Integrando:

$$\frac{\tan s}{9} + C$$

sustituyendo (s)

$$\frac{\tan\left[\sin^{-1}(\frac{x+1}{3})\right]}{9}+C$$

$$51.\int \tan^5 x\sec^3 xdx$$

Usar la identidad trigonométrica

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

entonces

$$\int \tan x\sec^3 x(\sec^2 x-1)^2 dx$$

sustituir

$$u = \sec x \quad y \quad du = \tan x\sec xdx$$

entonces

$$\int u^2(u^2-1)^2 du \;\rightarrow\; \int (u^6-2u^4+u^2)du \;\rightarrow\; \int u^6du-2\int u^4du+\int u^2du$$

integrando:

$$\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^3}{3}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{\sec x^7}{7}-\frac{2\sec x^5}{5}+\frac{\sec x^3}{3}+C$$

$$52.\int \cos^4 \frac{x}{2}dx$$

Sustituir

$$u=\frac{x}{2} \quad y \quad du=\frac{1}{2}dx$$

entonces

$$2\int \cos^4 udx$$

usando la fórmula de reducción para el coseno:

$$\frac{1}{2}\sin u\cos^3 u+\frac{3}{2}\int \cos^2 udu$$

para la integral restante escribir

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\sin u\cos^3 u + \frac{3}{2}\int\left[\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}\right]du$$

expandiendo la integral

$$\frac{1}{2}\sin u\cos^3 u + \frac{3}{4}\int\cos 2udu + \frac{3}{4}\int du$$

haciendo un cambio de variable

Donde

$$s = 2u \quad y \quad ds = 2du$$

entonces

$$\frac{1}{2}\sin u\cos^3 u + \frac{3}{8}\int\cos sds + \frac{3}{4}\int du$$

Integrando:

$$\frac{1}{2}\sin u\cos^3 u + \frac{3}{8}\sin s + \frac{3u}{4} + C$$

sustituyendo (u) y (s)

$$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2} + \frac{3}{8}\sin x + \frac{3x}{8} + C$$

$$53.\int\frac{t^5}{1+t^2}dt$$

Sustituir

$$u = t^2 \quad y \quad du = 2tdt$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int\frac{u^2}{1+u}du$$

haciendo división larga

$$\frac{1}{2}\int\left[u + \frac{1}{u+1} - 1\right]du \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int udu + \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}du - \frac{1}{2}\int du$$

integrar y para la integral fraccionaria sustituir

$$s = u+1 \quad y \quad ds = du$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int udu + \frac{1}{2}\int\frac{1}{s}ds - \frac{1}{2}\int du \rightarrow \frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}\log(s) - \frac{u}{2} + C$$

Sustituyendo (u) y (s)

$$\frac{t^4}{4}+\frac{1}{2}\log(t^2+1)-\frac{t^2}{2}+C$$

$$54.\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ \rightarrow \sin^{-1}x+C$$

no muestra pasos intermedios

$$55.\int\frac{5x^3+x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

Aplicando fracciones parciales

$$\int\left[\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{5x+1}{x^2+1}\right]dx \rightarrow\ 5\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

Para la primer integral hacer el cambio

$$u=x^2+1\ \ y\ \ du=2xdx$$

entonces

$$\frac{5}{2}\int\frac{1}{u}du+\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

para la segunda integral nos da igual a

$$\tan^{-1}x$$

entonces

$$\tan^{-1}x+\frac{5\log u}{2}+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

ahora hacemos el cambio de variable

$$s=x^2+1\ \ y\ \ ds=2xdx$$

entonces

$$\tan^{-1}x+\frac{5\log u}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{s^2}ds$$

integrando

$$-\frac{1}{2s}+\tan^{-1}x+\frac{5\log u}{2}+C$$

ustituyendo(u) y (s)

$$-\frac{1}{2(x^2+1)}+\tan^{-1}x+\frac{5\log(x^2+1)}{2}+C$$

$$56.\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$$

Sustituir

$$x=3\tan u \quad y \quad dx=3\sec^2 udu \therefore u=\tan^{-1}\frac{x}{3}$$

Entonces

$$3\int\frac{1}{3}\csc^2 u\sec udu \rightarrow \int\csc^2 u\sec udu$$

usar la identidad trigonométrica

$$\csc^2 u=\cot^2 u+1$$

Entonces

$$\int(\cot^2 u+1)\sec udu \rightarrow \int\sec udu+\int\cot u\csc udu$$

Multiplicar la primera integral por tan u +sec u (numerador y denominador)

$$\int\frac{\sec^2 u+\sec u\tan u}{\sec u+\tan u}du+\int\cot u\csc udu$$

Sustituir

$$s=\tan u+\sec u \quad y \quad ds=\sec^2 u+\tan u\sec udu$$

Entonces

$$\int\frac{1}{s}ds+\int\cot u\csc udu \rightarrow \log s+\int\cot u\csc udu$$

integrando

$$\log s-\csc u+C$$

sustituyendo (u) y (s)

$$\log\left[\tan(\tan^{-1}\frac{x}{3})+\sec(\tan^{-1}\frac{x}{3})\right]-\csc(\tan^{-1}\frac{x}{3})+C$$

$$57.\int x\sin^2 xdx$$

Usar la identidad trigonometrica

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Entonces

$$\int x(\frac{1}{2}(1-\cos 2x))dx \ \rightarrow \frac{1}{2}\int x\cos(2x)dx+\frac{1}{2}\int xdx$$

para la primer integral integrar por partes donde

$$f = x \quad dg = \cos(2x)$$

$$df = dx \quad g = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

entonces

$$-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int \sin 2xdx+\frac{1}{2}\int xdx$$

sustituir

$$u = 2x \quad y \quad du = 2dx$$

entonces

$$-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\int \sin udu+\frac{1}{2}\int xdx$$

integrando

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos u+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

$$58.\int (t+1)^2 e^{3t}dt$$

Expandiendo la integral

$$\int e^{3t}t^2dt+2\int e^{3t}tdt+\int e^{3t}$$

hacer por partes donde

$$f = t \qquad dg = e^{3t}dt$$

$$df = dt \qquad g = \frac{e^{3t}}{3}$$

entonces

$$\frac{1}{3}e^{3t}t^2+\frac{4}{3}\int e^{3t}tdt+\int e^{3t}$$

integrando por partes donde

$$f = t \qquad dg = e^{3t}dt$$

$$df = dt \qquad g = \frac{e^{3t}}{3}$$

entonces

$$\frac{1}{3}e^{3t}t^2 + \frac{4}{9}e^{3t}t + \frac{5}{9}\int e^{3tdt}$$

integrando

$$\frac{1}{3}e^{3t}t^2 + \frac{4}{9}e^{3t}t + \frac{5e^{3t}}{27} + C$$

$$59.\int e^{\sin x} sen2xdx$$

Reescribir la integral como

$$\int 2e^{\sin x}\sin x\cos xdx \rightarrow 2\int e^{\sin x}\sin x\cos xdx$$

Sustituir

$$u = \sin x \quad y \quad du = \cos xdx$$

entonces

$$2\int e^u udu$$

Integrando por partes donde:

$$f = u \qquad dg = e^u du$$

$$df = du \qquad g = e^u$$

entonces

$$2e^u u - 2\int e^u du$$

Integrando

$$2e^u u - 2e^u + C$$

sustituyendo (u)

$$2e^{\sin x}\sin x - 2e^{\sin x} + C \rightarrow 2e^{\sin x}(\sin x - 1)$$

$$60.\int e^x \tan^2 e^x dx$$

Sustituir

$$u = e^x \quad y \quad du = e^x dx$$

entonces

$$\int \tan^2 u du$$

usando la identidad trigonometrica

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

tenemos

$$\int (\sec^2 u - 1) du \;\rightarrow\; \int \sec^2 u du - \int du$$

Integrando

$$\tan u - u + C$$

sustituyendo (u)

$$\tan e^x - e^x + C$$

$$61. \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

Sustituir

$$u = \sin x + 1 \quad y \quad du = \cos x dx$$

entonces

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

Integrando

$$2\sqrt{u}$$

sustituyendo (u)

$$2\sqrt{\sin x + 1}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

entonces el resultado es

$$\sqrt{6} - 2$$

$$62. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

Sustituir

$$u = \tan(\frac{x}{2}) \quad y \quad du = \frac{1}{2} dx \sec^2(\frac{x}{2})$$

luego transformar la integral usando las sustituciones

$$\sin x = \frac{2u}{u^2+1} \quad y \quad \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1} \quad y \quad dx = \frac{2du}{u^2+1}$$

Entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(u^2+1)(\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1-u^2}{u^2+1})} dx$$

simplificando

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-u^2+2u+1} du$$

completando el cuadrado

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-(u-1)^2} du$$

sustituir

$$s = u-1 \quad y \quad ds = du$$

Entonces

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-s^2} ds$$

sacando el factor fuera del denominador

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\frac{s}{2}^2} ds$$

sustituir

$$p = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad y \quad dp = \frac{1}{\sqrt{2}} ds$$

entonces

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-p^2} dp$$

integrando

$$\sqrt{2}\tanh^{-1} p + C$$

regresando a términos de (x)

$$\sqrt{2}\tanh^{-1}\left[\frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

obteniendo como resultado

$$\sqrt{2}\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$63.\int \sinh^{-1} tdt$$

Integrando por Partes donde:

$$f = \sinh^{-1} t \qquad dg = dt$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \qquad g = t$$

Entonces

$$t\sinh^{-1} t - \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Sustituir

$$u = t^2 + 1 \;\; y \quad du = 2tdt$$

entonces

$$t\sinh^{-1} t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

Integrando

$$t\sinh^{-1} t - \sqrt{u} + C$$

sustituyendo (u)

$$t\sinh^{-1} t - \sqrt{t^2+1} + C$$

$$64.\int x\cot x^2 dx$$

solución no disponible en wólfram

$$-\frac{x^2}{2} - x\cot x + \log(\sin x) + C$$

$$65.\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$$

Sustituir

$$u = x + 1 \;\; y \;\; du = dx$$

entonces

$$\int_3^8 \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}}\,du$$

sustituir

$$s=\sqrt{u} \quad y \quad ds=\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

Entonces

$$2\int_3^8 \frac{1}{s^2-1}\,ds$$

sacando el factor -1 del denominador

$$-2\int_3^8 \frac{1}{1-s^2}\,ds$$

Integrando

$$-2\tanh^{-1} s$$

regresando a términos de x

$$\left[-2\tanh^{-1}(\sqrt{x+1})\right]\Big|_3^8$$

lo que da como resultado

$$\log(\frac{3}{2})$$

$$66.\int \frac{t+3}{t^2+2t+1}\,dt$$

Rescribir la integral como:

$$\int (\frac{2t+2}{2(t^2+2t+1)}+\frac{2}{t^2+2t+1})dt \quad \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+1}dt+2\int \frac{dt}{t^2+2t+1}$$

Sustituir para la primera integral

$$u=t^2+2t+1 \quad y \quad du=(2t+2)dt$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du+2\int \frac{dt}{t^2+2t+1}$$

para la segunda integral completar el cuadrado

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du+2\int \frac{dt}{(t+1)^2}$$

sustituir

$$s=t+1 \quad y \quad ds=dt$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du+2\int\frac{ds}{s^2}$$

integrando

$$\frac{\log u}{2}-\frac{2}{s}+C$$

sustituyendo (u) y (s)

$$\frac{\log(t^2+2t+1)}{2}-\frac{2}{t+1}+C$$

$$67.\int\frac{\sec^4 3u}{\cot^{12} 3u}du$$

Tomar la integral

$$\int\tan^{12} 3u\sec^4 3udu$$

sustituir

$$s=3u \quad y \quad ds=3ds$$

Entonces

$$\frac{1}{3}\int\tan^{12} s\sec^4 sds$$

usar la identidad trigonométrica

$$\sec^2 s=\tan^2 s+1$$

Entonces

$$\frac{1}{3}\int\tan^{12} s\sec^2(\tan^2 s+1)sds$$

sustituir

$$p=\tan s \quad y \quad dp=\sec^2 sds$$

Entonces

$$\frac{1}{3}\int p^{12}(p^2+1)dp$$

Expandiendo

$$\frac{1}{3}\int p^{14}dp+\frac{1}{3}\int p^{12}dp$$

integrando

$$\frac{s^{15}}{45}+\frac{s^{13}}{39}+C$$

regresando a términos originales

$$\frac{(3u)^{15}}{45}+\frac{(3u)^{13}}{39}+C$$

$$68.\int_0^2 x^5\sqrt{x^2+4}dx$$

Sustituir

$$x=2\tan u \quad y \quad dx=2\sec^2 udu$$

entonces

$$2\int_0^2 64\tan^5 u\sec^3 udu \;\rightarrow\; 128\int_0^2 \tan^5 u\sec^3 udu$$

usar la identidad trigonométrica

$$\tan^2 u=\sec^2 u-1$$

Entonces

$$128\int_0^2 \tan u\sec^3 u(\sec^2 u-1)du$$

sustituir

$$s=\sec u \quad y \quad ds=\tan u\sec u$$

entonces

$$128\int_0^2 s^2(s^2-1)^2ds \rightarrow 128\int_0^2 s^6ds-256\int_0^2 s^4ds+128\int_0^2 s^2ds$$

Integrando

$$\frac{128s^7}{7}-\frac{256s^5}{5}+\frac{128s^3}{3}$$

regresando a términos originales

$$\left(\frac{128\sec^7(\tan^{-1}(\frac{x}{2}))}{7}-\frac{256\sec^5(\tan^{-1}(\frac{x}{2}))}{5}+\frac{128\sec^3(\tan^{-1}(\frac{x}{2}))}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

entonces esto da como resultado

$$\approx 28.175$$

$$69.\int\frac{3+\sin x}{\cos^2 x}dx$$

Tomar la integral

$$\int(3\sec^2 x+\tan x\sec x)dx \;\rightarrow\; \int\tan x\sec xdx+3\int\sec^2 xdx$$

Pasar a sen y cos la primer integral

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+3\int\sec^2 xdx$$

Sustituir

$u = \cos x \quad y \quad du = -\sin x$

entonces

$$\int -\frac{1}{u^2}du + 3\int \sec^2 xdx$$

Integrando

$$\frac{1}{u} + 3\tan x + C$$

sustituyendo (u)

$$\sec x + 3\tan x + C$$

$$70.\int \frac{\sin 2x}{5+\cos^2 x}dx$$

Tomando en cuenta la identidad

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

Sustituir

$u = \cos^2 x + 5 \quad y \quad du = -2\sin x\cos xdx$

entonces

$$-\int \frac{1}{u}du$$

Integrando

$$-\log u + C$$

sustituyendo (u)

$$-\log(\cos^2 x + 5) + C$$

$$71.\int x(1+\log x)^2 dx$$

Expandiendo la integral tenemos

$$\int (x + x\log^2 x + 2x\log x)dx \quad \rightarrow \quad \int x\log^2 xdx + 2\int x\log x + \int xdx$$

La primer integral la hacemos por partes donde

$$f = \log^2 x \qquad dg = xdx$$

$$dd = \frac{2\log x}{x}dx \qquad g = \frac{x^2}{2}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}x^2\log^2 x-\frac{1}{2}\int 2x\log xdx+2\int x\log xdx+\int xdx \rightarrow \frac{1}{2}x^2\log^2 x+\int x\log xdx+\int xdx$$

Haciendo la segunda integral por partes donde

$$f=\log x \qquad dg=xdx$$

$$dd=\frac{1}{x}dx \qquad g=\frac{x^2}{2}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}x^2\log^2 x+\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{2}\int xdx$$

finalmente

$$\frac{1}{2}x^2\log^2 x+\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{x^2}{4}+C$$

$$72.\int x\cos^2 xdx$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$$

Entonces

$$\int\frac{1}{2}x(\cos 2x+1)xdx$$

Expandiendo la integral tenemos

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int xdx$$

integrando por partes donde

$$f=x \qquad dg=\cos 2xdx$$

$$df=dx \qquad g=\frac{1}{2}\sin 2x$$

entonces

$$\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx+\frac{1}{2}\int xdx$$

sustituir

$$u=2x \quad y \quad du=2dx$$

entonces

$$\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\int \sin u du+\frac{1}{2}\int x dx$$

integrando

$$\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{\cos u}{8}+\frac{x^2}{4}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$$

$$73.\int e^x e^{e^x} dx$$

Tomar la integral

$$\int e^{x+e^x} dx$$

sustituir

$$u=e^x \quad y \quad du=e^x dx$$

entonces

$$\int e^u du$$

Integrando

$$e^u+C$$

sustituyendo

$$e^{e^x}+C$$

$$74.\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} dx$$

Racionalizando la integral

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} * \frac{-\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{-\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

Entonces

$$\int (\sqrt{x}+\sqrt{x+1})dx \quad \rightarrow \quad \int \sqrt{x+1}dx+\int \sqrt{x}dx$$

sustituir

$$u=x+1 \quad y \quad du=dx$$

Entonces

$$\int \sqrt{u}du+\int \sqrt{x}dx$$

integrando

$$\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

$$75.\int \cos x\cos 2xdx$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$$

Entonces

$$\int \frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)dx \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\int \cos 3xdx+\frac{1}{2}\int \cos xdx$$

Sustituir

$$u=3x \quad y \quad du=3dx$$

entonces

$$\frac{1}{6}\int \cos udu+\frac{1}{2}\int \cos xdx$$

Integrando

$$\frac{\sin u}{6}+\frac{\sin x}{2}+C$$

sustituyendo (u)

$$\frac{\sin 3x}{6}+\frac{\sin x}{2}+C$$

$$76.\int \frac{2t}{1+e^{t^2}}dt$$

Sustituir

$$u=t^2 \quad y \quad du=2tdt$$

entonces

$$\int \frac{1}{1+e^u} du$$

sustituir

$$s = e^u \quad y \quad du = e^u du$$

Entonces

$$\int \frac{1}{s(s+1)} ds$$

usando fracciones parciales

$$\int \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] ds$$

Expandiendo la integral

$$-\int \frac{1}{s+1} ds + \int \frac{1}{s} ds$$

sustituir

$$p = s+1 \quad y \quad dp = ds$$

entonces

$$-\int \frac{1}{p} dp + \int \frac{1}{s} ds$$

Integrando

$$\log s - \log p + C$$

regresando a términos de (t)

$$\log(e^{t^2}) - \log(e^{t^2} + 1) + C$$

simplificando

$$\log(\frac{e^{t^2}}{e^{t^2} + 1}) + C$$

$$77. \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x+2)^2}} dx$$

Sustituir

$$u = 5x+2 \quad y \quad du = 5dx$$

entonces

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

integrando

$$\frac{1}{5}\sin^{-1}u+C$$

Sustituyendo (u)

$$\frac{1}{5}\sin^{-1}(5x+2)+C$$

$$78.\int\frac{dx}{e^{x}+2e^{-x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$79.\int\cos x\log|\sin x|dx$$

Sustituir

$$u=\sin x\quad y\quad du=\cos x$$

entonces

$$\int\log u du$$

integrando por partes

$$f=\log u\qquad dg=du$$

$$df=\frac{1}{u}du\qquad g=u$$

entonces

$$u\log u-\int du\rightarrow u\log u-u+C$$

sustituyendo (u)

$$\sin x\log(\sin x)-\sin x+C$$

$$80.\int\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$$

Integrar por partes donde

$$f=\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\qquad dg=dx$$

$$df=-\frac{2}{x^{2}-1}dx\qquad g=x$$

entonces

$$x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2\int\frac{x}{x^2-1}dx$$

Sustituyendo

$$u=x^2-1 \quad y \quad du=2xdx$$

entonces

$$x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\int\frac{1}{u}du$$

Integrando

$$x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\log u+C$$

sustituyendo (u)

$$x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\log(x^2-1)+C$$

Referencias

---

[1] Santiago Z. A.C. & Santiago P. M.J. Resúmenes de matemáticas II con notas históricas.(2011). España. Visión Libros.

[2] Maor E. e:historia de un número. (2006) México: Conaculta

[3] Coto G. A. (2010). La aventura del cálculo. ISBN 978-9-84-414-2520-0.

[4] Zill, Dennis G. (1987). Cálculo con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

[5] L. Salas S., Hille E. & J. Etgen G. Calculus: una y varias variables. V1. (2002). México. Reverté

[6] Engler A. a.t (1977). El cálculo diferencial. Argentina. ISBN: 987-508-549-9

[7] Zill, D.G. & Wright W.S. (2011). Cálculo de una variable. México: Mc-GrawHill.

[8] Clifford A. Pickover (**2012**) El libro de las matemáticas. Nueva York: Sterling Publishing

[9] Barrantes, Hugo. (2003) Calculo integral en una variable. Costa Rica: EUNED

[10] Casteleiro, José M. & Paniagua R. (2002). Cálculo integral. Madrid: ESIC Editorial.

[11] Cuellar J.A. (2012). Matemáticas V. México: McGraw-Hill.

[12] Stewart J. (2010).CÁLCULO conceptos y contextos. México: Cengage learning.

[13] Apostol, Tom. (2005) Calculus I. México: Reverte.

[14] Stewart I. (2009). Historia de las matemáticas: en los últimos 1000 años. España: Crítica

[15] Flores Espinoza Rubén ET AL. (2008) Fundamentos del cálculo. México: Garabatos. ISB: 970-9920-18-5

[16] Molina M. J.L. et. al. (2011). Análisis derivativo de funciones. México: CONALEPMICH.

[17] Aguilar M. A. et al. (2010). Cálculo diferencial e integral. México: Pearson-CONAMAT.

[18] Larson R. et.al. (2010). Cálculo Esencial. México: Cengage Learning

[19] Granville W.A (1982). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa.