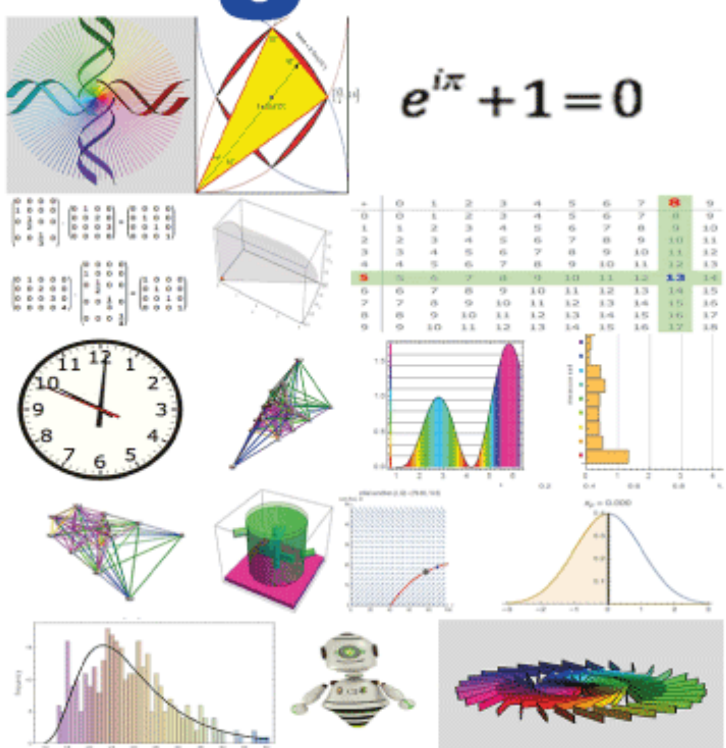
2021

Matemáticas I:

Álgebra



Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

Matemáticas I: Álgebra

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

ISBN: 978-607-xxxxx-x-x

Morelia. Michoacán. Julio de 2021

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Coordinación de Innovación Educativa CIE/QFB

PRESENTA:

Matemáticas I: Álgebra

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

Ochoa H. E., *et al.* (2021) ***Matemáticas I: Álgebra.*** Morelia: UMSNH-CIE

Título original de la obra:

Tzintzuntzán No. 173 Col. Matamoros C.P. 58240, Edificio E planta alta Morelia, Michoacán. México. MX

Teléfono (443) 3-14-28-09. Email: eohqfb@yahoo.com.mx

ISBN: 978-607-xxxxx-x-x

Programa: Profesor escritor.

Directorio

Contenido

Matemáticas I

INTRODUCCIÓN

El empleo creciente de los métodos cuantitativos en diversas disciplinas como la economía, la psicología, y la sociología así como en las ciencias naturales y exactas, ha convertido a los procesos matemáticos y algebraicos en una importante herramienta para su estudio, ya que el lenguaje matemático ofrece la posibilidad de trabajar con conceptos en un nivel de formalidad tal, que permite la formulación de generalizaciones.

PROPOSITOS GENERALES

Los propósitos generales de ésta asignatura son que el alumno:

- Ubique los momentos clave en la historia de las matemáticas relacionados en el desarrollo de la aritmética y el álgebra.
- Resuelva operaciones básicas entre polinomios y expresiones con potencias, e interprete problemas prácticos representándolos por medio de expresiones algebraicas.
- Domine la resolución de cualquier planteamiento de productos notables y factorización, así como de ecuaciones lineales.
- Reconozca la inmersión de la matemática como proceso histórico-social dinámico y complejo.

COMPETENCIAS

Al término de este curso, el alumno estará capacitado para:

- Manipular todo tipo de operaciones aritméticas, especialmente las que implican números fraccionarios.
- Enunciar las propiedades de los números reales.
- Trabajar con las operaciones básicas entre polinomios.
- Reconocer las fórmulas básicas de los productos notables y factorización.
- Manejar las leyes de los exponentes.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Traducir problemas prácticos al lenguaje algebraico, así como, encontrar soluciones e interpretar resultados.
- Reconocer e interpretar problemas prácticos por medio de ecuaciones lineales.
- Plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y encontrar sus soluciones.

UBICACIÓN CURRICULAR

Esta asignatura se ubica en el primer semestre del plan de estudios, pertenece al núcleo de formación del tronco común y corresponde al campo de conocimiento matemático. Está relacionada con el resto de las asignaturas de matemáticas de este núcleo, especialmente con Matemáticas II, con la Física y la Química, así como las pertenecientes al núcleo de formación propedéutica: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, y Matemáticas Financieras

LINEAMIENTOS DIDÁCTICOS

Los lineamientos didácticos que se sugieren son los siguientes:

- Desarrollar el curso de modo que se tomen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de generar un aprendizaje significativo.
- Vincular los conceptos teóricos con experiencias cotidianas y plantear problemas recreativos, con el objeto de eliminar el prejuicio de que las matemáticas son áridas y difíciles.
- Incluir comentarios históricos dando preferencia a lo anecdótico sobre lo historiográfico. No será imprescindible la evaluación de estos conocimientos.

EVALUACIÓN

La evaluación del aprendizaje se define como el proceso por el cual se analiza y se valora el logro de las competencias planteadas en esta asignatura. De ahí que las estrategias de evaluación se aplicarán desde el inicio hasta el final del curso, de tal forma que sus resultados permitan, por un lado retroalimentar a profesores y alumnos acerca de los progresos del aprendizaje y las posibles deficiencias en la enseñanza que persistan en este y por otro, asignar una calificación al alumno que acredite o no el cumplimiento de las competencias establecidas para el curso.

En este sentido, se recomienda llevar a cabo tres tipos de evaluación:

- La diagnóstica.
- La formativa.
- La sumaria.

La evaluación diagnóstica se aplica al inicio del curso y tiene por objeto determinar si los alumnos poseen los conocimientos necesarios para el aprendizaje de los contenidos programáticos. Es importante destacar que los resultados de este tipo de evaluación no impactan de ninguna manera la calificación que se otorgue al alumno, al final del proceso.

La evaluación formativa se lleva a cabo durante el curso y tiene como propósito detectar deficiencias en el aprendizaje y en la enseñanza, valorando el progreso de los alumnos. Para tal efecto, se sugiere la aplicación de un examen parcial al finalizar cada unidad. Las calificaciones parciales se otorgarán considerando los resultados de los exámenes, así como la valoración que se haga de las siguientes actividades:

- Presentación de reportes de investigación bibliográfica.
- Presentación de ejercicios y problemas resueltos.
- Participación en exposiciones.

La evaluación sumaria tiene como finalidad determinar el grado de dominio de las competencias al término del curso, por lo que se recomienda, en este caso, la aplicación de un examen final. La calificación del curso se determinará con base en el promedio de los resultados de las evaluaciones parciales y del examen final.

Unidad 1. Aritmética

1. ¿Qué es un número?

Al igual que las obras literarias, las obras matemáticas nos ayudan a expandir nuestro círculo de empatía, liberándonos de la tiranía de un único punto de vista. Los números, debidamente considerados, nos hacen mejores personas. Por ejemplo, al pensar en los muchos puntos que infinitamente pueden dividir el espacio de nuestro corazón. Utilizamos a los números para dar sentido a nuestra realidad. Nos dicen cuantas categorías de cosas hay en nuestro alrededor. La hora en que veremos a alguien para conversar en un café. La edad que tendremos al egresar de la universidad. La cantidad de sal para cocinar unos chilaquiles. La distancia a la que está nuestra casa de la escuela. La velocidad de nuestra bicicleta. El número de hermanos que tenemos. Lo pequeño que somos comparados con las estrellas en el cielo. Nos ayudan a entender como invertimos nuestro tiempo, dinero y vida. En fin, los números los hay enteros, decimales, reales, imaginarios, irracionales, racionales, negativos, positivos, primos, y ellos están dentro de la toma de decisiones (probabilidad); en la medida de las dimensiones del espacio (geometría); en la cuenta de elementos de categorías (conjuntos); para identificar la unidad en las capas de la realidad (mónada); para realizar cálculos (lógica).

El rechazo de Aristóteles al pensamiento matemático fue antitético a la filosofía de su maestro Platón. Por otro lado, Pitágoras estudio aritmética, geometría, música y astronomía y postuló que los números enteros eran cruciales, por su notable capacidad para explicar, por ejemplo, los armónicos musicales y las propiedades de los objetos geométricos. La escuela pitagórica aseguro que los números enteros eran esenciales para una comprensión fundamental de la forma en que el universo está diseñado. Platón considero a las matemáticas fundamentales para hacer filosofía y que la geometría llevaría a la comprensión del mundo. Sin embargo, es Euclides quien introduce nuevos estándares de rigor al pensamiento matemático[1]. El libro de Euclides "Elementos" se convirtió en el texto más influyente durante siglos, Einstein comento al respecto: "si Euclides no encendió tu entusiasmo en la juventud, entonces no naciste para ser científico[2]". La idea de las regularidades en el comportamiento de los objetos que los humanos observamos en la Tierra, se pensó desde Arquímedes, eran descritas por leyes matemáticas. Este fue el primer paso de hacer trascender los sentidos humanos, es decir, al desplegar el poder de la razón imaginativa, con la mirada levantada a los objetos en el cielo.

Para comprender las ideas matemáticas, la biología y su ciencia cognitiva están interesadas en dar respuestas en el cómo los individuos entienden, aumentan su rendimiento y por qué algunos encuentran tantas dificultades en su aprendizaje matemático. La neurociencia, la genética y la psicología están conjuntando esfuerzos en el estudio de la subitización[3]. A la competencia matemática que se presenta como un desarrollo temprano de la habilidad numérica se le llama subitización y conteo. La primera, refiere a la numeración de elementos entre 1 y 4 dado por reconocimiento de patrones. El conteo además de hacerlo uno a uno, asigna símbolos dentro de un sistema numérico[4].

Subitización es un término científico que refiere a la habilidad de identificar y numerar objetos, sin error, rápidamente y exacto. Se cree que es la base del mismo mecanismo del conteo[5]. La acción de numerar es la habilidad de crear el valor total de un conjunto de elementos y la habilidad innata de numerar una cantidad pequeña de 1 a 4 en 250 milisegundos sin contar y libre de errores; a esto, los biólogos desde 1941 le nombraron subitización[6]. Subitización no es estimar una cantidad, sino un conocimiento de un patrón intuitivo[7], es preverbal, una cantidad concreta visual espacial. El conteo y la subitización solo pueden darse cuando se une la información visual de los objetos y se localiza a la unidad dentro de ellos[8].

La memoria de trabajo es un sistema necesario para acumular actividades complejas de conteo de grandes números[9], se especula que allí existe un buffer de acumulación secuencial, conformado por los mecanismos de focalizar la unidad (mónada) dentro de un conjunto de elementos, la capacidad de subitar y la visión espacial, todos ellos juegan a favor de desarrollar mayor complejidad en los rangos de una cuenta, pero son procesos diferentes[10]. El conteo es un proceso articulado en el buffer de manera serial y de acumulación simultánea, la subitización es más exacta, rápida y permite en pequeños rangos ganar exactitud en modo de tramos de numeración no simbólica. El conteo es ya un proceso simbólico con un rol de intención de cálculo de rangos mayores a 4 elementos y que permite llegar a grandes numeraciones. Además diferenciemos, el conteo es una estimación, un proceso de probabilidad de cálculo por subitización, el cual es inexacto y con errores siempre presentes en sus determinaciones.

Un número implica para su comprensión ideas de las disciplinas pedagógicas neuronales y matemáticas en procesos subyacentes de aprendizaje, es la cognición matemática empleada por los individuos para reconocer que en la realidad hay patrones numéricos. Se estima que el 24% de los adultos tienen dificultades para realizar cálculos de numeración equivalentes a niveles inferiores a los establecidos en niños de 8 años, se refiere en cálculos de conteos, fraccionarios, porcentajes y manejo de decimales[11]. Los científicos creen que el aprendizaje desde las capas subyacentes de la base biológica de los axiomas, permite más eficazmente aprender a identificar las ideas matemáticas que son cimientos y en consecuencia, mejora la abstracción del pensamiento matemático en todos aquellos que batallan con este tipo de conocimiento[12].

El rendimiento matemático está implicado con la aplicación formal de sistemas de representación simbólica con bajo contacto intuitivo de los axiomas de unidad, espacio geométrico, probabilidad, lógica y categorización. Los sistemas simbólicos representan ideas matemáticas que los estudiantes deben relacionar con la vida cotidiana justo antes de las estructuras formales simbólicas, esta pedagogía de las matemáticas es el paradigma **proceptual-simbólico**[13].

¿Qué es realmente un número? ¿Existen números como objetos abstractos independientes del lenguaje humano? ¿Son objetos lógicos construidos dentro de un sistema axiomático dado como lo sugieren los formalistas? O son simplemente etiquetas generadas por un sistema numérico para referir a tipos de cantidades o conjuntos. Otros, los más recientes en la escena científica, refieren a número como el resultado de habilidades innatas de la cognición matemática[14]. La cognición matemática ha descubierto procesos implicados en la comprensión de las ideas matemáticas y la forma de representación numérica en la aritmética. Es claro que los niños lactantes son capaces de procesar información numérica antes de aprender su representación simbólica. Este proceso innato de numerar y reconocer a la unidad dentro de las capas subyacentes de la realidad, permite a los niños desarrollar en adelante habilidades formales del pensamiento matemático. La subitización ha demostrado que la actividad de numerar está antes de que se conecten la palabra con número y símbolo dentro de un sistema numérico. Una vez que se aprende el sistema generador de números, los niños empiezan a usarlos en operaciones aritméticas.

La verdadera competencia aritmética desarrolla la idea de operador numérico de adición, sustracción, multiplicación y división; pero se requiere el conocimiento básico de número dentro de un entrenamiento formal del sistema simbólico numérico. Comprender lo que es un operador, nos ayuda a relacionar lo que es una operación aritmética al elegir las estrategias adecuadas para su cálculo. La memoria de trabajo se expande y la atención racional se agudiza para reflexionar la habilidad intelectual de numerar, estimar y el conteo de numerales grandes. Numeral lo referimos a la representación simbólica de número, pero en adelante unificamos la idea en simplemente número, como dos dimensiones, una refiere a patrones subitizar de cantidad y otra a un sistema numérico simbólico formal.

Los números racionales requieren que los niños vayan más allá de la lista de una cuenta de indexar símbolos con cantidades y en referencia profunda a la idea de mónada. Resultan estos números desafiantes para muchos adultos que dentro de las universidades reflejan una baja habilidad cognitiva para su manejo en operaciones aritméticas con racionales. Es necesario que las representaciones simbólicas de números, operadores y signos sean reconocidos desde las ideas intuitivas justo antes de mayores abstracciones simbólicas. Lo **proceptua**l refiere a un aprendizaje que valora como condición inicial, la habilidad de reconocer el significado matemático encapsulado en los símbolos. El pensamiento matemático es habilidad de comprensión (saber por qué: proceptual) y habilidad procedimental (saber cómo hacerlo: sistema simbólico formal).

A los matemáticos les tomó mucho tiempo llegar a preguntarse cuál fue la respuesta y mucho más tiempo para encontrar un número. El primer paso fue caracterizar a los números naturales. Resultó que su rasgo definitorio más importante no fue la noción de cantidad o su aritmética dentro del concepto de álgebra. Sino la prueba por inducción, por ser una mirada más profunda en su sustancia.

Proposición: La suma de los primeros números **n** naturales es:

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

Demostración: Esto es verdadero trivial para **n=1**. Si bien es cierto

$$\begin{array}{l} \quad 1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n \\ =+\dfrac{n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1}{(n+1)+(n+1)+(n+1)...+(n+1)+(n+1)+(n+1)} \\ =\dfrac{1}{2}n(n+1) \end{array}$$

Es decir, dos series infinitas una creciente y otra decreciente las sumamos, luego factorizamos **(n+1)** y dividimos entre dos, y encontramos la suma total de los números naturales.

Muchos consideran este tipo de demostración como un argumento de prueba de verdad, se establece el estado de la proposición como verdadero. El único problema con esta forma de pensar es que llegar a valores grandes de **n** requiere de un gran número de aplicaciones de pasos en general. Nunca podremos cubrir todos los números naturales en un infinito de deducciones si procedemos un caso a la vez. Pero una demostración, por definición, se compone de un número finito de líneas de cláusulas hipotéticas deductivas sobre el universo de posibilidades.

La salida a este dilema es eliminar la parte de ***y así sucesivamente*** de pruebas por casos repetitivos, de una demostración. Demostrar por inducción entonces es hacer encajar un extenso número de casos (**proposiciones**) en un tipo de prueba como *y así sucesivamente*. Un número por deducción e inducción apunta directamente a la **definición de número natural**.

A los números verbales los llamamos simplemente números y a los escritos numerales. Al referirnos a las cantidades abstractas descritas por los números, nosotros utilizamos símbolos como 1,2,3,4,5,6…, y así sucesivamente. Investigadores lingüistas, antropólogos, psicólogos, biólogos y otros, están creando una nueva historia para los números. Algunos son partidarios de considerar a los números como conceptos que no vienen a las personas de manera innata o natural. Es decir, así como la escritura y la lectura alfabética no son naturales, sino de creación cultural. Los números están ausentes de algunas poblaciones del mundo. La noción de contar es parte del perfil de nuestra especie, dada por un acumulador cerebral para reconocer el paso del tiempo, pero para la noción de número, para esta última es necesario ser educado. El número o numeral, aquí lo referimos indistinto mientras no especifiquemos lo contrario. El número es uno de los inventos claves en el curso de nuestra civilización, vive como una especie de piedra pedernal que encendió la línea de tiempo humana cuando se percibe al universo entero como una estructura de números.

Tal vez la mejor manera de conocer este invento llamado número, es partir de reconocer en nuestro cerebro una habilidad sustancial, la de registrar el paso del tiempo. Pero tal vez, contar el tiempo desarrolló que apreciáramos patrones repetitivos de los ciclos de las estaciones. Es evidente que nuestra percepción del tiempo pasa por el papel de número en nuestra reflexión. ¿Qué significa percibir o sentir el tiempo? El tiempo es percibido en términos culturales, una especie de consenso de la experiencia cultural de una sociedad. A menudo los humanos de cualquier cultura reconocen el paso del tiempo, en términos de algo que pasó. El tiempo no es un parámetro de movilidad lento o rápido, el tiempo no se mueve realmente, no pasamos a través de él. Los científicos cognitivos establecieron hace tiempo que los seres humanos tienen una tendencia generalizada a utilizar especialmente cosas concretas, como los objetos materiales. Es decir, asumimos al tiempo como algo objetivo y parte del mundo material de nuestra vida. Así, sí nuestra vida cambia, es hablar de movimiento usando el paso por momentos de la existencia y siendo incapaces de volver en la dirección presente-pasado. Es a través de nuestra conciencia cerebral que enfrentamos el futuro como pasado en potencia a través de nuestro acumulador neuronal que registra una porción progresiva de cantidades. El habla humana es evidencia de las expresiones del tiempo, de cómo lo sentimos, por ello podemos hablar en presente, pasado y futuro, incluso desaparecer al tiempo. La mayoría de los humanos, percibimos el paso del tiempo en la manera en que contamos, escribimos y leemos[15]. La música podemos verla como otro sistema artificial que el hombre inventó, reconociendo en ella las sensaciones del tiempo.

En la base espacial numérica, podemos reconocer las formas flexibles de pensamiento evidente, en el cómo consideramos cantidades naturales en una línea de tiempo. Es decir, consideramos las cantidades a la izquierda (pasado) y la derecha (futuro) y el presente metafóricamente instante de existencia. Así la cultura creó calendarios, barras de progreso en descarga de archivos "PDF", líneas de tiempo en los libros de historia y así sucesivamente. Y hay sólida evidencia científica que sugiere que las prácticas simbólicas por defecto impactan en el cómo percibimos al tiempo. Los científicos observan que al pedir a un grupo de personas que organicen un conjunto de fotografías, tienden siempre a colocarlas de izquierda a derecha en el sentido temporal que ellas infieren[16].

Estas pruebas reflejan un punto importante, apostamos a que el tiempo es una práctica cultural y lingüística, como resultado del acumulador que registra el paso del tiempo. Y aquí es donde nace la historia del número, como un símbolo que afecta todas las nociones de nuestra existencia. Los **números naturales** poseen la dirección del tiempo percibido, son los números claros obtenidos del pensamiento del movimiento del tiempo. Si pensamos al tiempo como algo que fluye, moviéndose a lo largo de la línea de tiempo frente a nosotros, su paso es contable, divisible y misterioso en cuanto a su límite. Piense en barras de progreso de descargas de archivos informáticos, la realidad, es que hay eventos que requieren ciertos procesos que consumen tiempo antes de que se manifieste un cambio significativo, los números naturales quizá fueron estos cambios significativos, donde la unidad es el mínimo cambio detectable al paso del tiempo. Esta conceptualización centrada en el número como paso de tiempo podría decirse que rige nuestra vida.

¿Qué hora es al momento que realiza esta lectura? Para nosotros, son las 13:51 al momento en que escribimos estas palabras en el occidente mexicano. Puesto que en este momento del día estoy en mi oficina, en mi escritorio, y no en mi casa. Qué significa esto, 13 horas y 51 minutos contados desde la media noche, en realidad nuestra experiencia mental es numérica. Son los números resultado de crear un medio para cuantificar nuestra existencia, dividir metafóricamente el paso del tiempo en unidades manejables para planear nuestra vida. Son un indicador del hecho de que los seres humanos en algún momento decidieron cuantificar momentos de tiempo de la experiencia. El tiempo puede ser real, existe además de nuestra experiencia, pero el número es una invención para relacionarnos con el mundo. De hecho, cuando respondemos sobre ¿qué hora es?, contestamos lingüísticamente con una tradición cultural que adoptó un sistema antiguo de numeración.

Al considerar la división de cada una de las rotaciones de la tierra, cada día, en 24 horas. ¿Por qué se dividió de este modo? No hay ninguna motivación astronómica en esta división. Después de todo, en teoría podría ser dividida un día sobre cualquier número. Fueron los egipcios los que para sus relojes de hace 3 mil años dividieron la luz del día en doce partes iguales. De esta división de la luz en el transcurso del día nace una tradición cultural apropiada para su sentido de la existencia. Así de esta manera, la unidad de tiempo para los relojes, fue el número 12, así la base numérica de la sensación del paso del tiempo para la luz del día fue duodecimal. Los sistemas de numeración, hay muchos de ellos, basados en muchas cosas diferentes. Sin embargo, para nosotros hoy, el sistema duodecimal está muy arraigado para contar el paso del tiempo, impone una cierta perspectiva en nuestro día a día. Nuestra vida cotidiana está gobernada por números para las horas, minutos y segundos. Pero en realidad el tiempo no ocurre en estas u otras unidades discretas. La segmentación del tiempo es contable en unidades producto de la mente humana[17].

Contar el tiempo, es una necesidad que impulsó al hombre a crear la noción de número natural, sistema de numeración y gobierna las conductas sociales de nuestra civilización. Inventar al número como depositario de cantidad, pasó desde luego por la noción cultural de unidad de cantidad o mónadas como Leibniz las nombró. Esta idea abstracta de unidad, es el antecedente más relevante de nuestra especie para dar orden temporal a nuestro plan de vida. **La unidad**, es el concepto esencial e íntimo vinculado a la historia de los números.

El registro fósil sugiere que los *homínidos*, fueron capaces de registrar cantidades bajo el concepto de unidad. Los humanos modernos tenemos unos 100 mil años que surgimos, debemos aceptar que no fuimos nosotros los que descubrimos la unidad, pero sí fuimos nosotros los que con esta abstracción desarrollamos el invento de número. En el cruce temporal entre homínidos y humanos, allí está el origen del número[18]. Quizá una forma razonable, es que los *Homo sapiens* en su competencia por sobrevivir, intentaron descifrar los primeros registros rupestres de las cuevas de los *homínidos*. Así aprendimos la idea de unidad, como abstracción de algo necesario para establecer una cuenta de registro. La unidad fueron semillas, patos, caballos, hombres,… a menudo la unidad fue algo útil para que el registro fuera una memoria útil. Este cambio cognitivo es evidente, en la fabricación de tecnología de puntas de flecha, herramientas de hueso, quizá la teoría de supremacía del *Homo sapiens* sobre sus parientes más cercanos, es que la abstracción de la unidad a número en una cuenta natural, fue determinante para tomar ventaja tecnológica[19].

De esta historia, podemos aprender, que las sociedades con mayor dominio matemático, son las que más poder acumulan y se hacen valer en forma de dominio tecnológico. Planear una guerra, es hacer uso del más sofisticado conocimiento matemático, solo baste ver el resultado del proyecto "**Enigma**" que decidió el rumbo de la segunda guerra mundial. Alan Turing fue el principal responsable de descifrar Enigma, el código secreto utilizado por el ejército alemán en la Segunda Guerra Mundial, contribuyendo con ello a acortar la guerra. Inventó una máquina, que permitía descifrar mensajes de Enigma de forma masiva, así nació la guerra cibernética, impulsada por avances matemáticos en materia de cifrado y codificación de códigos. Quizá lo que los *Homo sapiens* lograron, fue descifrar la noción de unidad de los *homínidos*, y tomar ventaja similar a lo hecho por Alan Turing para ganar la guerra.

La historia del número, es la misma explicación que nos hace lingüísticos por actos de invención y creación de sistemas alfabéticos y numéricos. Esta creación, es decir, invenciones no naturales, nos dieron la habilidad de comunicar, cooperar y organizar colectivamente el poder del conocimiento, transmitiendo por símbolos mensajes al futuro, haciendo portable la información y creando un arte de números y letras, que a la postre desarrollaron la civilización de manera espectacular[20]. Pero tenga presente, que la noción de número a partir de la idea de unidad, creó las bases de todo el sistema de numeración moderno.

Como conclusión parcial, un número es un símbolo dentro de un sistema numérico construido bajo las nociones de registro del tiempo y unidad (cantidad), donde es resultado de una tradición cultural que ha elegido una base numérica como patrón representativo de la existencia humana. El número está como noción innata en nuestra biología.

1.2 Contar números

Desde tiempos tempranos del hombre en la tierra, surge la necesidad de contar, hacer un registro de animales, frutas, guerreros y muchas cosas más. Para ello emplearon pilas de piedras, marcas en huesos, palos de madera y dedos de las manos que al paso del tiempo se convirtieron en la base del sistema numérico de base 10. Los Mayas emplearon la base 20, y en Mesopotamia la base 60.

La unidad como abstracción matemática en todas las culturas fue desarrollada. La unidad para la noción de un símbolo que asocia cantidad dentro de un sistema numeral fue fundamental, así el número es la base de contar. En nuestro familiar sistema decimal, basado en el número 10, se escriben los números posicionándose en columnas separadas para las unidades (1), diez (10), cientos (100), miles (1000)…, a medida que avanzamos de derecha a izquierda. El conjunto de símbolos de este sistema son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Este sistema de valor refleja las cantidades asociadas colocando cada símbolo en su columna, multiplicando por su valor asociado a cada columna y sumando podemos determinar la cantidad asociada en base 10. Por ejemplo el número 579:

$$\begin{array}{ccc} 10^2 & 10^1 & 10^0 \\ 5 & 7 & 9 \end{array}$$

$$500+70+9=579$$

$$579_{10}=579$$

El valor de cada número de una cifra depende de su posición.

Para un sistema posicional numérico de base 5, el conjunto de símbolos son 0,1,2,3,4, ¿qué cantidad base 10 representa el número 2341 base 5?

$$\begin{matrix} 5^3 & 5^2 & 5^1 & 5^0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

$$250+75+20+1=346$$

Resolviendo en Wolfram Alpha https://www.wolframalpha.com

Base-5 digit value	Place	→	Base-10 equivalent		Value
2	5^3	→	2×5^3		250
3	5^2	→	3×5^2	+	75
4	5^1	→	4×5^1	+	20
1	5^0	→	1×5^0	+	1
				=	346

$$2341_5 = 346$$

Para un sistema numérico posicional de base 16, el conjunto de símbolos es 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F, ¿qué cantidad base 10 representa el número E3FD base 16? Donde A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15 en cantidad.

Base-16 digit value	Place	→	Base-10 equivalent		Value
14	16^3	→	14×16^3		57 344
3	16^2	→	3×16^2	+	768
15	16^1	→	15×16^1	+	240
13	16^0	→	13×16^0	+	13
				=	58 365

$$E3FD_{16} = 58365$$

Podemos inventarnos cualquier sistema numérico posicional, por ejemplo uno de base 7, su conjunto de símbolos sería 0,1,2,3,4,5,6, ¿qué cantidad base 10 representa el número 4351 base 7?

Base-7 digit value	Place	→	Base-10 equivalent		Value
4	7^3	→	4×7^3		1372
3	7^2	→	3×7^2	+	147
5	7^1	→	5×7^1	+	35
2	7^0	→	2×7^0	+	2
				=	1556

$4351_7 = 1556$

Podemos inventarnos un sistema numérico posicional de base 32, su conjunto de símbolos sería (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V), ¿que cantidad base 10 representa el sistema 89FMV base 32?

Base-32 digit		Base-32 digit value
8	→	8
9	→	9
f	→	15
m	→	22
v	→	31

Base-32 digit value	Place	→	Base-10 equivalent	Value
8	32^4	→	8×32^4	8 388 608
9	32^3	→	9×32^3	+ 294 912
15	32^2	→	15×32^2	+ 15 360
22	32^1	→	22×32^1	+ 704
31	32^0	→	31×32^0	+ 31
				= 8 699 615

Para un sistema numérico posicional de base 2, el conjunto de símbolos es (0,1) ¿qué cantidad base 10 representa el número 10101101 base 2?

Base-2 digit value	Place	→	Base-10 equivalent	Value
1	2^7	→	1×2^7	128
0	2^6	→	0×2^6	+ 0
1	2^5	→	1×2^5	+ 32
0	2^4	→	0×2^4	+ 0
1	2^3	→	1×2^3	+ 8
1	2^2	→	1×2^2	+ 4
0	2^1	→	0×2^1	+ 0
1	2^0	→	1×2^0	+ 1
				= 173

Con los sistemas numéricos podemos contar toda clase de objetos de la realidad. Pero, si no hubiera nada allí, no habría necesidad de contar, simplemente introducimos el número cero o incluso parece menos necesario utilizar números negativos, por ejemplo, la expresión - 8 chivos para los hombres antiguos hubiera parecido sin sentido.

Para ver de un modo natural el concepto de cero y los números negativos en nuestra época, podemos imaginar 0ºC, -5ºC. Pero los conceptos de cero y números negativos llevaron miles de años para emerger, aunque en nuestro tiempo parecen muy naturales. Las primeras apariciones de los números cero y los negativos se presentaron probablemente en el comercio. Las ganancias fueron registradas como números positivos, las deudas con números negativos y cero el equilibrio.

Hace algunos años se desarrollaba una amplia discusión en cuanto a si el nuevo milenio debe comenzar en el año 2000 (que lo hizo) o en el 2001 (desde el siglo XX comenzó en el 1901). El problema surgió porque no había ningún año 0. Los términos "antes de Cristo AC" y "después de Cristo DC", fueron introducidos en el año 531 por Dionysus Exiguus, pero él no los podía establecer como año 0, porque para ese año no se había introducido año 1 AC inmediatamente después del año 1 DC. Un sistema más natural fue introducido en 1740 por el astrónomo Jacques Cassini, él elige seleccionar como año 0 justo el año de nacimiento de Cristo y manteniendo los años AC y DC justo uno antes y uno después de 1, por lo tanto el milenio sin duda inició en el año 2000.

Antes de continuar, debemos distinguir claramente entre cero y nada. Cero es un número como cualquier otro número, solo que este representa indeterminación de cantidad, si dividimos la unidad entre infinito, es decir $\frac{1}{\infty} \approx 0$, es la incertidumbre de aproximarnos a la nada. Mientras la nada significa la ausencia de cualquier cosa, incluyendo cantidad en sentido abstracto.

Desde este punto, los números naturales son la base de un sistema numérico y la cuenta infinita dentro de este sistema son también números naturales, dado que son cuentas de unidad en unidad como proceso natural. La idea de número se aplica con los conceptos de cero y negativos, generando a la familia de números enteros. Los enteros son los números naturales positivos, los negativos y cero. Tenga en cuenta que 0 es identidad aditiva para nuestros sistemas de numeración, es decir, añadiendo cero a cualquier número no le produce cambio, si **x** es una variable que recibe números, entonces sí sumamos cero, **x+0=x,** para todo **x**. Así como 1 es el elemento neutro bajo la multiplicación (**x**)x1=0.

Ni Griegos, ni Egipcios utilizaron al cero, en su estilo geométrico de ver a la aritmética, el número a menudo es representado por longitudes de líneas, así que 0 o longitud cero habría sido difícil de imaginar. Pero los mesopotámicos con su sistema numérico de base 60, aún sin dejar huecos para indicar ninguna entrada de números en esa posición, en el cero se espera que el valor previsto en dicha posición sea un comodín para marcar el salto del final al principio de la base numérica, en tal caso lo empleamos hoy en día. Pero ese cero no tiene concepto para emplearse al modo de cálculo, el cero para el cálculo lo introducen los Mayas $1/\infty \approx 0$. Es decir, en términos modernos, una aproximación a la nada de manera infinitesimal en base 10.

El cero Maya nos dice para la geometría, que un infinitesimal $1/\infty$ dimensional en el espacio, tiene largo, ancho y alto. Es decir, el cero dentro de un sistema geométrico representa el origen del sistema y es un infinitesimal de tres dimensiones de algo que existe en ese espacio.

Los Indios sin embargo, desarrollaron un sistema numérico decimal basado en los números 1 a 9 y más adelante introducen el cero, estos diez dígitos podían representar cualquier número entero, por grande que fuera. Pero el cero indio representó el conjunto vacío, es decir, la nada. Pero en su sistema el cero representó un comodín para la transición de la secuencia de la base numérica.

Desde este momento en adelante el cero podría ser utilizado en la aritmética de números enteros negativos y positivos. Después de haber tratado con la suma, resta y multiplicación en donde el cero, el uno y los negativos mostraron coherencia total en la aritmética, pero con la atención de la división restrictiva de cualquier número entre cero,

0/0=0

a/0=? No está definido, donde **a** es cualquier entero diferente de cero.

Pudiéramos decir que a/0 es infinito, pero infinito no es un número y no obedece a las reglas de la aritmética, por ejemplo:

$\infty + 2 = \infty$,

$\infty - 2 = \infty$,

$\infty \times 2 = \infty$

La división sobre cero de un número diferente de cero, no está definido, es una incoherencia dentro de las matemáticas, basta con emplear una computadora y programar en ella una división sobre cero, el código de computadora provocará que el sistema se vuelva inestable.

De los números naturales, pasamos a los números enteros, ahora pasaremos a los números reales que agregan otras dos clases de números. Otros tipos de números surgen de la división, estas fracciones pueden ser racionales o irracionales, en ellos están los números pi y e. Y al conjunto que agrupa a los números naturales, enteros, fraccionarios positivos y negativos se le llama, conjunto de números reales. Pero es hasta que cero es establecido en el cálculo cuando los fraccionarios se desarrollan.

El uso del cero en cálculos aparece en las diferencias, 4 - 5=-1, y la diferencia de 5 -5=0 ajustando el estatus matemático a los negativos y la neutralidad de cero:

1+0=1; 5-0=5; 0+0=0; 0-0=0; 0-4=-4.

A partir de aquí, cero es parte del sistema aritmético. Reservando que no está definida la división de los números entre cero.

Después de haber tratado con la suma, la multiplicación y la resta, se atendieron los números positivos o negativos **a/b**, donde **b** es distinto de cero. Mientras 0/0=0 es una definición vacua.
El camino a los números reales se abre después de que tenemos claro que **a/a** es un número entero, que los hay positivos y negativos y cero. De los fraccionarios podemos deducir que en ellos habitan los números enteros positivos, negativos y el cero. Al romper un número en fracciones nos permite la división del número. Al multiplicar una fracción simplemente multiplicamos denominador por denominador y numerador por numerador de las fracciones:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Para sumarlos o restarlos, primero colocamos a los fraccionarios con denominador común y luego procedemos a la resolución de una suma modesta.

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{5}=\frac{10}{20}+\frac{12}{20}=\frac{22}{20}$$

Las fracciones ya estaban plenamente establecidas para el momento en que el cero apareció en la escena, particularmente en los problemas de comercio entre sociedades.

1.3 Aritmética

Los apartados anteriores se consideran elementales para la currícula básica de las matemáticas en el mundo. Se enseñan a nivel de educación básica en las escuelas. Aunque todos estos aspectos del pensamiento matemático son considerados elementales, no hay un límite claro entre las matemáticas elementales y avanzadas.

Podemos rescatar del contexto anterior, conceptos como infinito, abstracción, demostración, objeto matemático, objetividad, existencia y base axiomática en las matemáticas, que son inseparables para comprender matemáticas.

En casi todo el mundo se refiere a la Aritmética como el dominio humilde de la adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros y fracciones. Se comienza con la noción de números naturales en la primaria y se concluye con el entrenamiento de la misma en dispositivos electrónicos (calculadora). Pero desde Euclides se ha cultivado la teoría de los números, resolución de ecuaciones con enteros, el algoritmo de la división (cómo encontrar el máximo común divisor de dos números enteros positivos) y factorizar en números primos, como parte de la aritmética.

Esta álgebra de números (aritmética) nace con la búsqueda de soluciones enteras positivas a ecuaciones como estas:

$$y^2 = x^3 + 2$$
$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Sorprendentemente ayudan a introducir números de la forma:

$$a + b\sqrt{2}$$
$$a + b\sqrt{-2}$$

Donde **a**, **b** son enteros ordinarios, y se pretende que estos nuevos números se comporten como enteros ordinarios. La previsión es realmente justificable, dado que nos permite desarrollar y explorar la teoría de los números primos.

Para esta fracción $2727931/2336107$, ¿cómo saber si está en su forma reducida? Es decir, que ningún divisor común al numerador y al denominador existe. Para responder esta pregunta, tenemos que encontrar el máximo común divisor de 2727931 y 2336107, que parece difícil. Incluso encontrar los divisores de 2727931 parece difícil, y de hecho no hay ningún buen método establecido para números muy grandes. Es destacable, que puede ser más difícil encontrar los divisores comunes de dos números, que encontrar el divisor particular de cada uno de ellos. Por ejemplo, independientemente sabemos que el máximo común divisor de 30000033 y 30000032 es 1, sin saber los divisores de cualquiera de estos números. ¿Por qué? Pues bien, si **d** es un divisor común de 30000033 y 30000032 tenemos:

30000032=dp
30000033=dq

Donde **p** y **q** son enteros positivos. Y por lo tanto;

30000033- 30000032= d(q - p)

Donde **d** también divide a la diferencia de 30000032 y 30000033, que es 1. Pero el entero positivo solo se divide sobre 1, entonces **d=1**. Más generalmente, si **d** es un divisor común de dos números **a** y **b**, entonces **d** también divide **a - b**. En particular el máximo común divisor de **a** y **b** es un divisor de **a - b**.

Este simple hecho es la base de un algoritmo eficiente para encontrar el máximo común divisor. Se llama **algoritmo euclidiano**, escrito por Euclides en su libro Elements hace más de 2000 años. Formalmente uno calcula una secuencia de pares de números de la siguiente manera. Comenzando con un determinado par **a, b**; donde **a>b**, cada nuevo par consiste en el miembro más pequeño de la pareja anterior y la diferencia de la anterior pareja. El algoritmo termina cuando un par de números son iguales o cuando la menor diferencia comienza de nuevo a crecer, cada uno de ellos es el máximo común divisor de **a** y **b**. Por ejemplo, si fuera a=76 y b=64:

$$
\begin{aligned}
76,\ 64 &\rightarrow 64,\ 76-64=64,12\\
&\rightarrow 12,\ 64-12=12,52\\
&\rightarrow 12,\ 52-12=12,40\\
&\rightarrow 12, 40-12=12,\ 28\\
&\rightarrow 12, 28-12=12,\ 16\\
&\rightarrow 12,\ 16-12=12,4\\
&\rightarrow 4,\quad 12-4=12,\ 8\\
&\rightarrow 8,\quad 12-8=12,\ 4\\
&\rightarrow 4,\quad 12-4=12,\ 8
\end{aligned}
$$

gcd(76,64)=gcd(64,12)=gcd(52,12)=gcd(40,12)=gcd(28,12)=gcd(16,12)=
gcd(12,4)=4

La principal razón por la que el algoritmo euclidiano funciona es porque el máximo común divisor de **a** y **b** también es divisor de **a - b**. Si se denota como gcd, entonces gcd(**a,b**)=MCD(b, a-b) para **a**=13 y **b**=8:

$$
\begin{aligned}
13,\ 8 &\rightarrow\ 8,\ 13-8=8,5\\
&\rightarrow\ 5,\ \ 8-5=5,3\\
&\rightarrow\ 3,\ \ 5-3=3,2\\
&\rightarrow\ 2,\ \ 3-2=2,1\\
&\rightarrow\ 1,\ \ 2-1=1,1
\end{aligned}
$$

gcd(13,8)=gcd(8,5)=gcd(5,3)=gcd(3,2)=gcd(2,1)=gcd(1,1)=1

Tome en cuenta que, cuando empezamos con los números de Fibonacci consecutivos 13 y 8, la resta son todos los anteriores números de Fibonacci, y todos terminan inevitablemente en el número 1. Es el mismo con cualquier par de números consecutivos de Fibonacci, por lo que MCD de cualquier par de estos es 1. Por ejemplo, a=2584 y b=1597:

$$
\begin{aligned}
&2584,\ 1597 \to 1597,\ 2584-1597 = 1597, 987\\
&\to 987,\ 1597-987 = 987{,}610\\
&\to 610,\ 987-610 = 610, 377\\
&\to 377, 610-377 = 377,\ 233\\
&\to 233, 377-233 = 233,\ 144\\
&\to 144,\ 233-144 = 144, 89\\
&\to 89,\quad 144-89 = 89, 55\\
&\to 55,\quad 89-55 = 55,\ 34\\
&\to 34,\quad 34-21 = 21,\ 13\\
&\to 13,\quad 21-13 = 13,\ 8\\
&\to 8,\quad 13-8 = 8,\ 5\\
&\to 5,\quad 8-5 = 5,\ 3\\
&\to 3,\quad 5-3 = 3,\ 2\\
&\to 2,\quad 3-2 = 2,\ 1\\
&\to 1,\quad 2-1 = 1,\ 1
\end{aligned}
$$

Otra razón importante, es que el algoritmo produce continuamente números más pequeños y por lo tanto, termina con números iguales porque enteros positivos no pueden disminuir para siempre. Este principio asegura que no encontraremos ninguna pendiente de descenso infinita, es obvio, sin embargo, es prueba por inducción y base de la teoría de números.

Propiedad de la división. Para cualquier número natural **a** y **b** diferentes de cero, son números naturales **q** y **r** (cociente y resto) tal que:

$a = qb + r$

donde

$|r| < |b|$.

La ventaja de la división con el resto es que generalmente es mucho más rápido, que restas repetidas. Es lo suficientemente más rápido para encontrar el MCD de números con miles de dígitos. Por ejemplo, a=93164 y b=5826:

Paso 1: 93164 dividido entre 5826 es 15 y sobran 5774

Paso 2: 5826 dividido entre 5774 es 1 y sobran 52

Paso 3: 5774 dividido entre 52 es 111 y sobran 2

Paso 4: 52 dividido entre 2 es 26 y sobran cero

1) $93164 = 5826 \times 15 + 5774$
2) $5826 = 5774 \times 1 + 52$
3) $5774 = 52 \times 111 + 2$
4) $52 = 2 \times 26 + 0$

Así que gcd(93164, 5826)=2

El **algoritmo euclidiano**, como cualquier algoritmo produce una secuencia de eventos. Cada evento depende de una manera sencilla del evento anterior, pero uno no capta toda la secuencia en una sola fórmula. Sin embargo en realidad es una fórmula, la llamada **fracción continua**.

Por ejemplo, cuando aplicamos el algoritmo euclidiano para el par 211,27 produce la secuencia de coeficiente 7;1,4,2,2. Esta secuencia es capturada por la ecuación:

$$\frac{211}{27} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{22}{27}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{27/22}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{5}{22}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{22/5}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{5}}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5/2}}}$$

$$\frac{211}{27} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

En esta etapa el proceso se detiene porque el resto es 1 y previo divisor es 2, y es exacta. Puesto que el algoritmo euclidiano, produce números que disminuyen en tamaño, por lo tanto, siempre se detiene. Así que cualquier número racional positivo tiene una fracción continua finita. Y por contrario, si una relación de números produce una fracción continua infinita, la relación es irracional. Hasta ahora no habíamos contemplado aplicar el Algoritmo euclidiano para números irracionales… obviamente de proporciones racionales. El resultado es sorprendentemente simple y satisfactorio cuando aplicamos el algoritmo de fracción continua a $\sqrt{2}+1$ y 1.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Ahora ocurre esto:

Al aplicar separación entera y parte fraccionaria

$\sqrt{2}+1=2+(\sqrt{2}-1)$

Puesto que $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

No hay necesidad de ir más allá, el denominador $\sqrt{2}+1$ a la derecha ahora puede ser sustituido por:

$$2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Así que $\sqrt{2}+1$ ocurre de nueva vez y así sucesivamente. Por lo tanto, el algoritmo de fracción continua nunca se detendrá.

El $\sqrt{2}+1$ es irracional, y por tanto, raíz de dos lo es también. Los griegos sabían que raíz de dos es irracional, por lo que queda la duda si ellos sabían esta demostración. Sin duda, Euclides sabía que el algoritmo euclidiano implica a la irracionalidad. Es posible que los irracionales fueran descubiertos de esta manera.

Ejercicio 1: Para los pares de números realizar gcd(n,m) por algoritmo de restas y por la propiedad de división.

1) gcd(53,19)=1
2) gcd(987,61)=1
3) gcd(233,55)=1
4) gcd(177,51)=3
5) gcd(512,42)=2

Ejercicio 2: Obtener la **fracción continua** para los pares siguientes determinando si es irracional o racional la fracción.

1) par 223,21
2) par 121,13
3) par 172,5

Estimado lector, pero Usted se preguntará de nueva cuenta porqué ampliar el pensamiento matemático cuando el estudiante promedio no puede realizar operaciones aritméticas con números fraccionarios. Ahora toca en este apartado resolver la aritmética de pares ordenados o llamados fraccionarios del tipo **a/b**.

1. Suma de fracciones

La suma con denominador común:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{19}{28}+\frac{9}{28}=1$$
$$\frac{7}{16}+\frac{27}{16}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$$
$$\frac{27}{11}+\frac{24}{11}=\frac{51}{11}$$
$$\frac{24}{23}+\frac{16}{23}=\frac{40}{23}$$
$$\frac{21}{11}+\frac{30}{11}=\frac{51}{11}$$

Sustracción con denominador común:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$\frac{6}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{17}-\frac{16}{17}=-\frac{9}{17}$$

$$\frac{6}{5}-\frac{13}{5}=-\frac{7}{5}$$

$$\frac{4}{23}-\frac{13}{23}=-\frac{9}{23}$$

$$-\frac{17}{5}+\frac{14}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$\frac{17}{25}-\frac{29}{25}=-\frac{12}{25}$$

La suma con denominador no común:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=(\frac{3}{4}\bullet\frac{7}{7})+(\frac{2}{7}\bullet\frac{4}{4})=\frac{21}{28}+\frac{8}{28}=\frac{29}{28}$$

$$\frac{23}{21}+\frac{12}{23}=(\frac{23}{21}\bullet\frac{23}{23})+(\frac{12}{23}\bullet\frac{21}{21})=\frac{529}{483}+\frac{252}{483}=\frac{781}{483}$$

$$\frac{14}{13}+\frac{7}{3}=(\frac{14}{13}\bullet\frac{3}{3})+(\frac{7}{3}\bullet\frac{13}{13})=\frac{42}{39}+\frac{91}{39}=\frac{133}{39}$$

$$\frac{6}{11}+\frac{7}{19}=(\frac{6}{11}\cdot\frac{19}{19})+(\frac{7}{19}\cdot\frac{11}{11})=\frac{114}{209}+\frac{77}{209}=\frac{191}{209}$$

La substracción con denominador no común:

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=(\frac{5}{9})-(\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{3})=\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{32}{21}-\frac{25}{8}=(\frac{32}{21}\bullet\frac{8}{8})-(\frac{25}{8}\bullet\frac{21}{21})=\frac{256}{168}-\frac{525}{168}=-\frac{269}{168}$$

$$\frac{8}{3}-\frac{5}{4}=(\frac{8}{3}\bullet\frac{4}{4})-(\frac{5}{4}\bullet\frac{3}{3})=\frac{32}{12}-\frac{15}{12}=\frac{17}{12}$$

$$-\frac{14}{5}+\frac{11}{2}=-(\frac{14}{5}\bullet\frac{2}{2})+(\frac{11}{2}\bullet\frac{5}{5})=-\frac{28}{10}+\frac{55}{10}=\frac{27}{10}$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{23}{8}=-(\frac{5}{2}\bullet\frac{8}{8})+(\frac{23}{8}\bullet\frac{2}{2})=-\frac{40}{16}+\frac{46}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{3}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{24}{21}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$-\frac{38}{15}\times\frac{-9}{20}=\frac{57}{50}$$

$$-\frac{30}{23}\times\frac{2}{3}=\frac{-60}{69}=\frac{-20}{23}$$

$$\frac{3}{22}\times\frac{24}{13}=\frac{72}{286}=\frac{36}{143}$$

División de fracciones:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{7}{5} = \frac{1 \times 5}{2 \times 7} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{9}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{9 \times 8}{4 \times 3} = \frac{72}{12} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{9}{4} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{38}{21} \div \frac{11}{24} = \frac{-38 \times 24}{21 \times 11} = \frac{-912}{231} = \frac{-304}{77}$$

$$-\frac{32}{13} \div \frac{21}{11} = \frac{-32 \times 11}{13 \times 21} = \frac{-352}{273}$$

Simplificación de fracciones:

$$\frac{42}{28} = \frac{14 \times 3}{14 \times 2} = \frac{14}{14} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{140}{180} = \frac{20 \times 7}{20 \times 9} = \frac{20}{20} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{280}{100} = \frac{20 \times 14}{20 \times 5} = \frac{20}{20} \times \frac{14}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{96}{72} = \frac{24 \times 4}{24 \times 3} = \frac{24}{24} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{114}{209} = \frac{19 \times 6}{19 \times 11} = \frac{19}{19} \times \frac{6}{11} = \frac{6}{11}$$

Como muchas ramas de las matemáticas, la historia de la teoría de los números comienza con Euclides. Elements contiene las primeras demostraciones de descenso (la existencia de factorización y terminación del algoritmo euclidiano), la primera prueba de la existencia infinita de los números primos y el primer estudio extenso de números irracionales, Euclides también realizó un gran avance en un tema que ha progresado muy poco desde entonces: números primos de la forma 2n-1 y números perfectos.

Los números enteros positivos se llaman **números perfectos** si la suma de sus divisores propios positivos (excepto ese mismo número) es equivalente a la cantidad que representan. Por ejemplo, los divisores de 6 son 1, 2 y 3 y 6=1+2+3, por lo que es un número perfecto. Los siguientes números perfectos son:

28, 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328…, Euclides descubre que $2^{n-1}(2^n-1)$, es una forma alternativa de escribir un número perfecto, cuando se cumple que 2^n-1 es un primo. Su prueba es muy simple, si escribimos p=2^n-1 los divisores apropiados de $2^{n-1}p$ son debido a la factorización única.

$6=2\times3=2^1(2^2-1) \qquad n=2$
$28=4\times7=2^2(2^3-1) \qquad n=3$
$496=16\times31=2^4(2^5-1) \qquad n=5$
$8128=64\times127=2^6(2^7-1) \qquad n=7$
$33550336=4096\times8191=2^{12}(2^{13}-1) \qquad n=13$

Sí

$1,2,2^2,...,2^{n-1}$

y

$p,2p,2^2p,...,2^{n-2}p$

La suma del primer grupo es 2^n-1, y la suma del segundo grupo es:

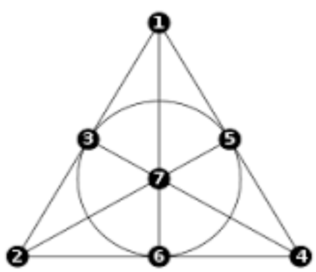
$(2^{n-1}-1)p=(2^{n-1}-1)(2^n-1)$

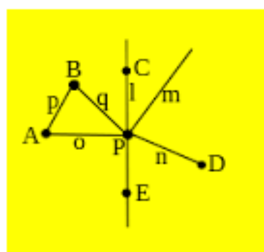
por lo que es la suma de los divisores propios [divisores propios, se dice de un número entero **b** que es divisible entre un número entero **a** (distinto de cero) si existe un entero **c** tal que **b=a x c**]

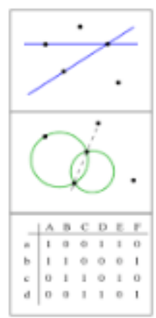
$(2^n-1)(1+2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2^n-1)$ será necesario.

Todavía no sabemos sobre una descripción clara de los números primos de la forma 2^n-1. Menos aún sabemos, si hay infinitamente muchos de ellos. Y, finalmente, no sabemos si hay algún número perfecto impar en todos ellos. Menos aún se sabe de los números primos de la forma 2^n+1, pero vale la pena mencionar porque desempeñan un papel inesperado en un problema geométrico antiguo: la construcción regular de m-gons con regla y compás[21]. Euclides dio construcciones de polígonos regulares de m=3 (triángulo equilátero) y m=5 (Pentágono regular) y para valores de m se deriva de estos por tomar su producto y doblar varias veces el número de partes, Gauss construyó un 17-gons (polígono regular de 17 lados) en 1796. Un polígono generalizado es una estructura m-gons de estructura de incidencia introducida por Jacques Tits en 1959.

Una estructura de incidencia es un triple (P, L, I) donde P es un conjunto cuyos elementos se llaman puntos, L es un conjunto disjunto cuyos elementos se llaman líneas y $I \subseteq P \times L$[22] es la relación de incidencia simétrica[23].







La clase del descubrimiento del patrón de Gauss es que 3, 5 y 17 son primos de la forma $2^n - 1$ es decir,

$$3 = 2^1 + 1$$
$$5 = 2^2 + 1$$
$$17 = 2^4 + 1$$

Gauss encontró de hecho que los polígonos construibles con un número primo de lados, son aquellos para los cuales el primo es de la forma $2^n + 1$. Puede ser demostrado fácilmente que los primos son realmente de la forma $2^{2^k} + 1$, pero solo cinco de ellos son conocidos:

$3 = 2^{2^0} + 1$
$5 = 2^{2^1} + 1$
$17 = 2^{2^2} + 1$
$257 = 2^{2^3} + 1$
$65537 = 2^{2^4} + 1$

Así, a pesar de que Euclides probo que hay infinitamente muchos números primos, los intentos de encontrar primos de las formas $2^n + 1$ y $2^n - 1$, han sido un fracaso rotundo. No cabe duda que los primos son el concepto más sencillo y difícil en las matemáticas, por que son, probablemente, el concepto que mejor resume la naturaleza de las matemáticas en sí mismas. Les vemos aparecer otra vez, en los lugares donde las matemáticas son particularmente interesantes y difíciles.

Los números primos son los enteros positivos fáciles de definir, pero difíciles de comprender, son mayores de 1 que no son productos de enteros positivos más pequeños. Así la secuencia de números primos comienza con:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911

919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

Cada número entero positivo **n** puede factorizarse en números primos, porque si **n** no es primo, es un producto de números enteros más pequeños **a** y **b**, nosotros podemos repetir el argumento con **a** y **b**: si cualquiera de ellos no es primo, entonces el producto son números enteros positivos más pequeños y así sucesivamente. La factorización de primos es una pendiente finita. En resumen, los números primos no incluyen al 1, porque este es la unidad, y ni es primo ni es compuesto. Un **número compuesto** es el que se obtiene multiplicando otros dos números. Todos los primos son impares excepto el 2, que es el único par encontrado. La factorización prima de números mayores a 1, es única sin importar el orden de los factores, por eso 1 no se considera primo. Pero, para retomar ahora las pendientes infinitas descendentes, citaremos a Fibonacci 1202 y Fermat 1670. Fibonacci utilizó el método para encontrar lo que ahora se llaman fracciones egipcias. Los antiguos egipcios tenían una curiosa manera de tratar con fracciones escribiendo a cada fracción entre 0 y 1 como la suma de las distintas fracciones de la forma 1/n, llamada **fracción unidad**.

$$\frac{13}{7}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$$

No es difícil encontrar fracciones como estas por ensayo y error, pero cómo podemos estar seguros. Fibonacci dio un método que puede ser probado para alcanzar el éxito, es decir, varias veces elimina la fracción más grande de la unidad. El método de Fibonacci siempre funciona porque, si **b** es una fracción en su mínima expresión y **1/n** es la fracción más grande de la unidad menos que **a/b**, entonces:

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{n}=\frac{na-b}{bn}=\frac{a'}{bn}$$

Es tal que $a'<a$. Si $na-b\geq a$ luego $a/b>1/(n-1)$, por eso que **1/n** no es la más grande fracción de unidad menos que **a/b**. Así el numerador del resto disminuye continuamente hasta detenerse (necesariamente en 1) en un número finito de pasos. Aquí mostramos como es esto para 5/7:

1/2= mayor fracción a la unidad< 5/7

Así que considere :

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$ Note que 3<5

Siguiente:

1/5= es mayor fracción < 3/14

considere:

$$\frac{3}{14}-\frac{1}{5}=\frac{1}{70}$$ Esto se da por terminado.

La solución es:

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70}$$

Otra manera es aplicando el método de James Joseph Sylvester, produce la representación de número racional r = a/b entre 0 y 1 como fracción egipcia:

1. Encontrar la fracción unitaria más ajustada a r pero menor que **r**. El denominador se puede hallar dividiendo **b** entre **a**, ignorando el resto y sumando 1. Si no hay resto, **r** es una fracción unitaria, así que ya no hay que seguir calculando.
2. Restar la fracción unitaria de **r** y aplicar de nuevo el paso 1 utilizando la diferencia entre las dos fracciones como **r**.

Para 5/7

5/7= 0 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/2

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

14/3= 4 con algún resto, entonces la siguiente fracción unitaria es 1/5

$$\frac{3}{14}-\frac{1}{5}=\frac{1}{70}$$

1/70 es una fracción unitaria y se concluye.

Ejemplo 1: para 21/32

21/32= 0 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/2

$$\frac{21}{32}-\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

32/5= 6 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/7

$$\frac{5}{32}-\frac{1}{7}=\frac{3}{224}$$

224/3= 74 con algún residuo, entonces la primera fracción unitaria es 1/75

$$\frac{3}{224}-\frac{1}{75}=\frac{1}{16800}$$

1/16800= es una fracción unitaria y se concluye.

Es importante notar que las fracciones egipcias no son la única posibilidad, por ejemplo para 19/20:

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180}$$

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

El resultado de Fermat fue considerado más sofisticado que el de Fibonacci, pero similar en su origen. Él probó que no hay ningún entero positivo x,y,z tal que

$$x^4 + y^4 = z^2$$

Demostrando que cualquier supuesta solución, es una solución más pequeña. Los enteros positivos no pueden disminuir indefinidamente, tenemos una contradicción. Fue Fermat quien introdujo el término **descenso** de este tipo de prueba. Se aplica la palabra descenso a cualquier prueba que se basa en el hecho de un descenso infinito posible en los números enteros positivos.

Como ya hemos expresado, los irracionales fueron reconocidos hace más de 2 mil años, pero es en los últimos 150 años que los detalles más importantes fueron revelados. En 450 antes de Cristo, los griegos desarrollaron matemáticas puras, desde entonces es constante el nombre que se les dio a los números irracionales, demostrando que el lado y la diagonal de un cuadrado no se pueden medir simultáneamente por la misma unidad o, dicho de otro modo, que la diagonal es inconmensurable con cualquier unidad que se mida el lado. Una responsabilidad moderna para nosotros, es reconciliar lo inconmensurable con lo irracional. Los irracionales irrumpen en la historia para dejar claro que no hay lugar permanente en el mundo de las matemáticas. ¿Qué entendemos por número irracional? Es un número inconmensurable que no se puede expresar como el cociente de dos enteros. O es un número decimal que no es finito ni recurrente. Para ambas definiciones, lo irracional se define en términos de lo que no es, es algo así como definir un número impar de uno que no lo es. Más aún, estas respuestas están plagadas de limitaciones: por ejemplo, ¿cómo las utilizamos para definir la igualdad o las operaciones aritméticas entre dos números irracionales? Aunque esto es familiar, las definiciones anteriores son absolutamente inútiles en la práctica. Por ello, los números irracionales están siendo definidos en términos de una de sus cualidades características, no como entidades que no existen. ¿Quiénes somos para decir que todos ellos existen? Por novedad, adoptamos un tercer enfoque:

Puesto que cada número racional **k** puede ser descrito como:

$$k = \frac{(k-1)+(k+1)}{2}$$

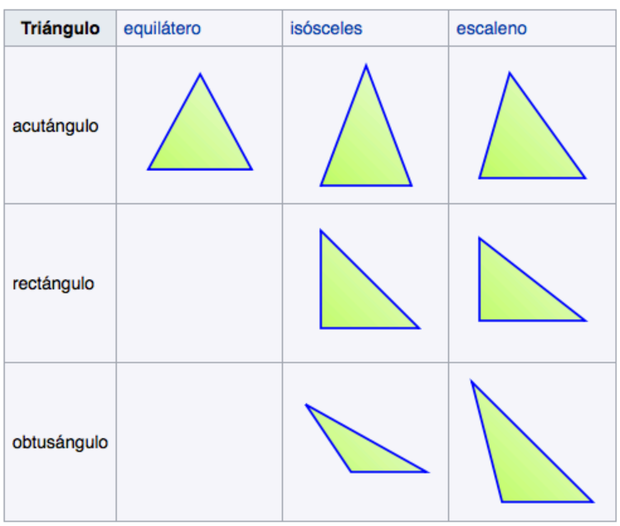
Cada número racional es equidistante de los otros dos números racionales (en este caso k+1, k-1); por tanto, ningún número racional es tal que sea una distancia diferente de todos los demás números racionales.

Con esta observación definimos los números irracionales como: el conjunto de todos los números reales con diferente distancia de todos los números racionales.

El conjunto de los números racionales es del mismo tamaño que el conjunto de números enteros, pero los números racionales son mucho más numerosos. Este problema estuvo a fuego lento durante siglos, en el siglo XIX matemáticos más rigurosos examinaron este hecho. De regreso a los griegos, "todas las cosas son números" era la máxima de Pitágoras y central a su filosofía. Número significó solo los discretos enteros positivos, con 1 como unidad por el que fueron medidos todos los otros números. Esto significó que todos los pares de números eran múltiplos de la unidad; es decir, todos los pares de números eran conmensurables por la unidad. En contraste, longitudes, áreas, volúmenes, masas…, eran cantidades continuas, las magnitudes físicas sirvieron a los griegos en lugar de los números reales. Cocientes discretos eran expresiones seguras y su magnitud se podría prever también, siempre que los dos valores afectados fueran del mismo tipo. Además, la declaración de proporciones A/B=C/D donde en un lado de la igualdad se encuentran magnitudes de un tipo y del otro de otro tipo. El estudio de los números irracionales en las escalas musicales reveló que estas coinciden con la armonía musical de los sonidos, medidos como radios de números enteros de longitudes de cuerda, por ejemplo, la octava corresponde a una relación de longitud de 2 a 1 y un perfecto 3 a 2. Esto evidencia la continuidad, que se podría medir en forma discreta. Se corroboró que las modificaciones y las proporciones de las escalas musicales eran expresables en números; desde entonces, todo lo demás parecía en su naturaleza entera para modelar en números los cielos y las cosas como sí fueran proporciones o escuelas que demuestran que la realidad son números.

Con este dogma Pitagórico, todo estaba listo para una fuerte crisis matemática de auténtico escándalo lógico. Entre Antioch y Proclus atribuyeron la definición de ángulo como una cantidad, específicamente la distancia entre líneas o planos. Con la autoridad de Proculos, Thales, el primero de los siete sabios de la tradición griega, trajo de Egipto a Grecia los siguientes postulados geométricos:

1. Un círculo es atravesado por cualquier diámetro.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos entre dos rectas que se cruzan son iguales.
4. Dos triángulos son iguales sí tienen dos ángulos y un lado igual.



Estos parecen desde nuestro tiempo logros muy modestos, sin embargo, su simplicidad desmiente su significado, como exhiben el germen de los procedimientos deductivos de la filosofía griega, recuerde que aún civilizaciones egipcias y babilónicas no tenían ningún pensamiento axiomático, abstracto o generalizado para resultados matemáticos. Estas recetas individuales son desde luego muy importantes, pero no son resultado de un proceso deductivo. Para darnos una idea de la magnitud de las recetas de Thales, deberíamos estudiar la enorme aplicación que ha significado el Teorema de Pitágoras. Con esto, la dirección del progreso matemático fue determinada como la cuna de la ciencia, al presentar las bases del razonamiento deductivo para inferir conclusiones lógicas.

El innombrable inconmensurable, estaba listo para crear una crisis matemática sin precedente. Tenga presente que los griegos llamaron al inconmensurable lo que hoy llamamos número irracional. Tengamos presente que para los pitagóricos todas las cosas existentes son números, la propia existencia es un número, y además introducen los términos: magnitud, longitud, área, volumen, lo que significó que no solo fueron notas musicales. Cualquier longitud era conmensurable entre sí, es decir, dadas dos líneas de diferente longitud, para los pitagóricos allí debe existir una tercera línea la cuál es su común unidad. En notación moderna, l_1 y l_2 con unidad común **u**, deben existir enteros n_1 y n_2 tales que:

$$l_1 = n_1 u$$

$$l_2 = n_2 u$$

La consecuencia de esto es que

Çç la relación entre dos magnitudes cualquiera es el cociente de dos enteros:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_1 u}{n_2 u}$$

Y la conveniencia del dogma filosófico depende de este resultado. En notación moderna, la unidad se llama monada, el proceso de demostración es:

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$$

Nos da:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

La media aritmética;

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

Nos da

$b=\sqrt{ac}$

La media geométrica.

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{a}$$

Nos da:

$$b=\frac{2}{1/a+1/c}$$

La media harmónica.

Con la fórmula de la media geométrica:

$$\frac{b}{1}=\frac{2}{b}$$

Tenemos la aparición de $\sqrt{2}$.

Dicho esto, se le atribuye a Hippasus de Metapontum, se le acusa de haber destruido el concepto de conmensurabilidad que rompió el dogma hermético de Pitágoras y fue Proclus quien respaldó este hecho, sacudiendo los cimientos de una realidad continua, algo semejante a la teoría cuántica que hace ver en forma discreta la realidad. Los pitagóricos habían hecho encajar la idea de que el mundo es algo cuantificable o medible, como forma cosmológica continua, pero los inconmensurables como cociente de dos magnitudes, significa que la herramienta geométrica fundamental se asemeja a un acto de probar la existencia. Los inconmensurables Platón los refirió como inmencionables, quizá con la idea de ocultar el poder de este descubrimiento respecto al mundo religioso. El método de prueba sobre raíz de dos, es un misterio, se cree que se realizó mediante un cuadrado de lado uno y de alguna manera al intentar demostrar su longitud diagonal se descubre que es inconmensurable, así lo mencionó el Libro Elements. En forma moderna supongamos que:

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

Donde a y b son números enteros en sus términos más bajos. Luego:

$a^2 = 2b^2$

Así que a^2

Si escribimos a=2k, entonces:
$a^2 = 4k^2$
y
$b^2 = 4k^2$

Por lo tanto, en su forma geométrica se esconde su belleza inherente de la discusión.

Desde este punto los griegos no hicieron nada para abrazar a los irracionales, habían evitado tanto como les fuera posible utilizar la geometría para sobrellevar a estos números, los romanos tampoco hicieron nada para adelantar en esta materia el pensamiento sobre los irracionales. Si queremos continuar con el avance histórico de estos números, tendremos que mirar a las civilizaciones Hindú y Árabe. Para los primeros, investigar la matemática no fue un deseo de pureza abstracta como lo fue para los griegos, sino una mezcla de las necesidades de hacer frente a la práctica contable, astronomía y astrología. Y además, el deseo de entender la teoría del sistema numérico; de ellos fue la aceptación del cero como el conjunto vacío y neutro entre positivos y negativos, al adoptar esta concepción perfeccionaron el sistema de posiciones base 10 y desarrollaron las raíces cuadradas de números. Esto no significó el progreso filosófico respecto a los irracionales, solo fueron aceptados como números y manipulados de la misma manera que los racionales, creando la aritmética irracional. Para estos antiguos Hindúes no implicó una raíz cuadrada, para estos dos enteros **a** y **b** su prescripción resulta en:

$\frac{1}{c}\left(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}\right)^2=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2$ Y así:

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{c}\left(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}\right)^2}$$

Por supuesto la idea era crear cuadrados perfectos al introducir un factor, que solo es posible si todos los factores primos **a** y **b** aparecen con la misma paridad en su potencia. Si tomamos **a**=3 y **b**=12, podemos tomar a **c**=12 para que ocurra:

$$\sqrt{3}\pm\sqrt{12}=\sqrt{\frac{1}{12}\left(\sqrt{36}\pm\sqrt{144}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{12}\left(6+12\right)^2}=\sqrt{\frac{18^2}{12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

Esto resulta complicado para nuestra mirada moderna, pero ciertamente fue una idea de nueva perspectiva.

$$a+b\pm 2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2$$

Es decir:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

Otra vez empleando el ejemplo anterior:

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3+12+2\sqrt{3}\sqrt{12}}=\sqrt{3+12+2\sqrt{36}}$$

$$\sqrt{15+12}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

Los Hindúes desarrollaron estas equivalencias:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \pm 1\right)^2}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\frac{1}{a}\left(a \pm \sqrt{ab}\right)^2}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c\left(\sqrt{\frac{a}{c}} \pm \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2}$$

A su manera los hindúes podían manipular los números irracionales de la forma de raíces cuadradas de números enteros no cuadrados.

Pero fueron los Árabes los que introducen los conceptos de álgebra y algoritmo por ejemplo. Fue el desarrollo del álgebra el que provoco significativamente el uso de números irracionales, difuminó la distinción entre tipos de números: enteros, racionales o irracionales, estos últimos tratados como raíz de un tipo de ecuación; el manipular la ecuación implica emplear números de este tipo.

Leonardo Bonacci, Leonardo Bigollo o Leonardo Pisano, o más reconocido en nuestro tiempo como Fibonacci (1170-1250 d.c.). Fibonacci se hace famoso por aportar una secuencia de números para el problema de cría de conejos, pero él fue un gran teórico de los números y desde niño aprendió el sistema hindú de numeración decimal y en sus viajes a Medio Oriente se hace de conocimientos matemáticos desconocidos en Europa. El cero y la noción de serie numérica pronto los reconoce como de enorme ventaja para hacer avanzar a la humanidad en el terreno aritmético. El tratamiento de los números inconmensurables de Euclides en particular le despertó enorme curiosidad, se planteó encontrar la raíz (única verdadera) de la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Sus argumentos establecen rápidamente que tal raíz no puede ser integral o racional, por otra parte, no podrá tomar cualquier forma dicha en el Libro X de Euclides *Elements*, y como tal representa un nuevo tipo de número irracional, que no es asequible de construcción por escuadra y compás, haciéndose eco por Omar Khayyam quien afirmó que efectivamente no era posible resolver la ecuación por todo lo conocido hasta ese momento.

Las soluciones encontradas las estimo en un sistema sexagesimal:

$$1;22;07;42;33;04;40 = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6} = 1.36880810785$$

Es una aproximación racional a nueve lugares decimales de exactitud para el número irracional:

$$\frac{1}{3}\left(-2 - \frac{13 \times 2^{1/3}}{\left(176 + 3\sqrt{3930}\right)^{1/3}} + \left(352 + 6\sqrt{390}\right)^{1/3} \right)$$

La propia naturaleza cíclica de los objetos celestes requiere que sus movimientos sean conmensurables unos respecto de otros; una prueba contraría destruiría la exactitud de las repeticiones y así el año no sería perfecto. El argumento supone que dos cuerpos se mueven hacia adelante y hacia atrás a la misma velocidad, uno a lo largo del lado y el otro en la diagonal de un cuadrado (con implícito cambio instantáneo de la dirección; si cada uno de ellos sale desde la misma esquina al mismo tiempo), entonces su regreso simultáneo a esa esquina requiere la existencia de los números positivos **n** y **m** hasta que $n\sqrt{2} = m \times 1$, con la irracionalidad de esta representación imposible se tambalea la exactitud. Sin embargo, admitió Fibonacci que llevar esta discusión a los movimientos de los cuerpos celestes requiere una gran discusión. El que estuvo dispuesto a esta empresa fue Edward III arzobispo de Canterbury, tomando la idea de Aristóteles que creía que el cociente de la fuerza a la resistencia de un objeto es proporcional a la velocidad lograda de tal modo, una visión falsa, sería decir que un aumento geométrico en el cociente de esa fuerza de resistencia resulta en una aritmética de incremento en velocidad. John Duns Scotus argumentó, que si las velocidades de dos objetos celestes eran inconmensurables entre sí, entonces así sería la distancia a la que viajarían en periodos de tiempo iguales y esto les haría volver a cierta configuración inicial en algún tiempo futuro imposible. En términos de la ecuación de Bradwardine para los coeficientes de las fuerzas (desconocidas) y las resistencias se espera para el exponente que la fracción de la velocidad sea un número irracional.

Por supuesto, para ese tiempo no había esperanza de acercarse a demostrar rigurosamente esto y se recurrió a un salto casi de fe, extrapolando un caso práctico de aritmética finita a la gran complejidad del movimiento celeste visto desde el año 1350. Sin embargo, este argumento no destruyó la creencia de un año perfecto, pero lo podemos considerar como una de las primeras declaraciones de que los irracionales están presentes en la realidad.

El fraile italiano Franciscano Luca Pacioli (1487) escribió para la "divina proporción: Justo como Dios no puede ser correctamente definido, ni puede ser entendido a través de palabras, esta proporción señala además a través de números inteligibles, que no puede ser expresada a través de cualquier cantidad racional, pero siempre permanece oculta y en secreto, y los matemáticos le llaman irracional"[24].

Michael Stifel (1544) en su aritmética integra dijo: "con razón se discute si los números irracionales son números verdaderos o falsos. Ya que, en el estudio de figuras geométricas, donde nos fallan números racionales, los irracionales tienen su lugar y demostración; exactamente aquellos números que no pueden ser probados… estamos movidos y obligados a admitir que realmente son números, obligados por los resultados que se derivan del movimiento celeste. Por otro lado, otras observaciones nos obligan a no considerarlos números. A saber, cuando tratamos de someter a números para evadir a los irracionales… Ahora podemos llamar número real a la naturaleza que carece de precisión. Por lo tanto, tal como un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, pero se encuentra oculto en una especie de nube infinita".

En cuanto a pi:

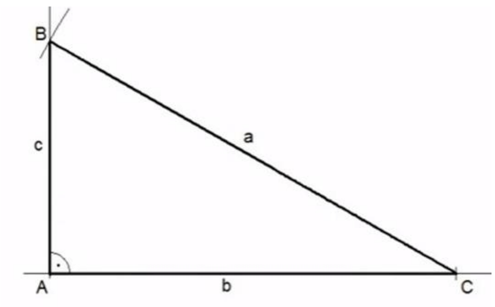
“Por lo tanto, el círculo matemático se describe acertadamente como el polígono regular de infinitos números de lados. Y así la circunferencia matemática no requiere de números racionales o irracionales”[25].

Pero finalmente Simon Stevin 1585 fue quien introduce a Europa el sistema decimal Árabe-Hindú y la aritmética de enteros, fracciones e irracionales, así como algo de álgebra polinomios y teoría de las ecuaciones. Para él, 1 era un número, pero cero no fue reconocido como número, aunque los negativos fueron acogidos, los números complejos fueron desechados. Además, él hizo del punto euclidiano algo más al referirlo como un concepto de continuidad[26] al compararlo con un flujo de agua y cada una de sus magnitudes que corresponde a una serie continua. Era impensable que la recta numérica o un plano tuviese perforaciones de caídas descendentes de números irracionales.

Frenchmen Pierre de Fermat (1601-65) y René Descartes (1596-1650) en común matemáticos y filósofos, quizá también compartieron una actitud escéptica. Fermat comúnmente al escribir ecuaciones enseguida investigaba su curva asociada. Descartes escogía una curva conocida e intentaba encontrar la ecuación asociada en términos de “x” y “y”. Con el advenimiento de la geometría analítica fue necesario resolver ecuaciones, que eran equivalentes a sus problemas geométricos asociados, pero a menudo estos presentaron raíces irracionales; apenas fue un problema nuevo, pero que ahora asume el momento histórico de mayor desafío práctico. Por ejemplo, el problema de encontrar la distancia entre dos puntos en el plano, con la prevalencia de irracionales cuadráticos, a pesar de que los puntos pueden ser coordenadas racionales, la distancia entre ellos es probablemente un irracional para:

$$\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Si suponemos una táctica para evitar números irracionales en el conjunto, es decir, solo considerar distancias racionales en el plano. Ahora, supongamos que podemos elegir tres puntos distintos para formar los lados de un triángulo con lados racionales, entonces el coseno con notación estándar tiene que ser:



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Este cociente es el ángulo de rotación del triángulo. Si A es racional medido en grados, los valores cos A serán:

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$$

Los valores aceptables serian 60º y 90º ya que el mismo cociente debe ser válido para los tres ángulos, para 60º el triángulo es equilátero. En definitiva, los únicos posibles triángulos con lados racionales deben ser equiláteros.

Pasamos ahora a un círculo unitario:

$$x^2 + y^2 = 1$$

En su forma paramétrica estándar:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Sabemos que contiene un número infinito de puntos racionales, con la parametrización todos ellos con parámetro **t** varían sobre todos los números racionales. Sin embargo, hay un número infinito de puntos en el círculo de al menos una coordenada que es irracional. ¿Pero importa esto? Tratando de encontrar la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ con la línea y=x se revela rápidamente que los números irracionales no se pueden evitar.

Por ejemplo, el círculo $x^2 + y^2 = 5$, otra vez tiene infinitos puntos racionales y al menos una coordenada irracional, Usted lo puede comprobar verificando en su forma parametrizada rotando el valor de **t**.

$$x = \frac{t^2 - 4t - 1}{t^2 + 1}$$
$$y = -2\frac{t^2 + t - 1}{t^2 + 1}$$

Para $x^2 + y^2 = 3$ no hay un solo punto racional por no haber parametrización racional. En fin, con el nacimiento del álgebra geométrica, los números irracionales eran por lo menos implícitamente y explícitamente a menudo indispensables. El cálculo diferencial e integral que pronto nacerían necesitarían de una noción de curva geométrica, surgida de rectas que pertenecen a círculos, los círculos son llamados polígonos regulares de **n** lados. Actualmente el problema de los irracionales se trasladó a lo que ahora conocemos como integración, en el continuo de cálculos sobre áreas bajo la curva aparecen los irracionales de nueva cuenta. El uso de infinitesimales hace conciencia de que un número de raíces inconmensurables entre sí, podrían reunir en una suma una relación que explica cantidades racionales, como si la infinitud misma de sumas de áreas infinitesimales destruyera de su interior la irracionalidad.

El número es:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este número es atribuido a Jacob Bernoulli (1654-1705[27]) y Leonhardo Euler. Euler sabía que la forma de fracción continua simple de un número irracional es infinita. Para demostrar un irracional se necesita construir una fracción continua para ver sí desciende de manera infinita y poder asegurar que nos encontramos frente a un irracional.

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}}$$

2.71828182845904

El número **e** en forma de fracción continua y en forma de decimal con 14 dígitos

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}}}$$

Resulta extraño que Euler no hubiera detectado que la irracionalidad de **e** era una consecuencia inevitable de su representación canónica como serie infinita, bien conocida por él.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots$$

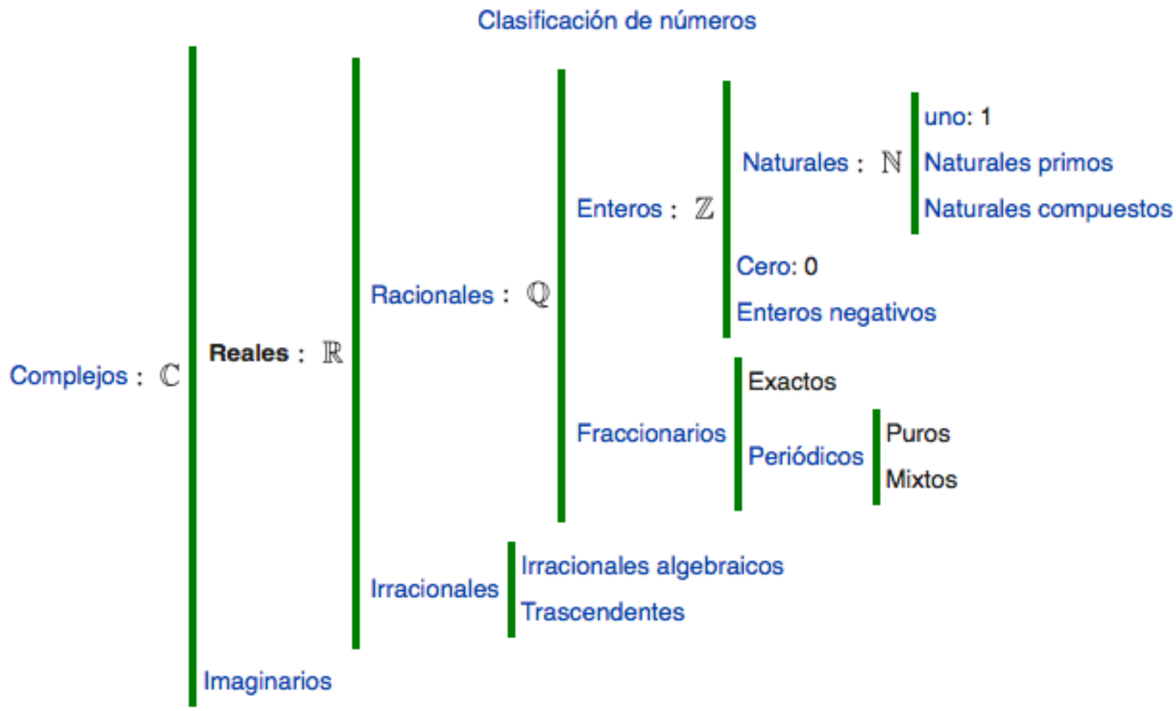
Fue Joseph Fourier, quien relaciona la irracionalidad de un número a la serie infinita de su representación.

Hemos descubierto hasta aquí los números trascendentales: $e,\pi,\sqrt{2}$. Un modo de comprobar su designación reside en la serie infinita de su representación. Si la expansión decimal de un número **a/b** es finita, entonces es un racional. Si la expansión decimal de un número **a/b** es infinita, entonces es irracional.

1.4 Los números reales

Estos números reales son el cuerpo o campo cerrado bajo una operación binaria (+,x), llamando a esta álgebra aritmética, cuyas propiedades son:

Axioma	**Suma**	**Multiplicación**	**Ejemplo**
Cerradura	$a+b\in\mathbb{R}$	$a\otimes b\in\mathbb{R}$	$2+9=11\in\mathbb{R}$ $2\otimes(-9)=-18\in\mathbb{R}$
Conmutativo	$a+b=b+a$	$a\otimes b=b\otimes a$	$5+8=8+5$ $9\otimes 7=7\otimes 9$
Asociativo	$a+(b+c)=c+(a+b)$	$a(b\otimes c)=(a\otimes b)c$	$\sqrt{7}+(5+9)=(\sqrt{7}+5)+9$ $5(7\otimes 8)=(5\otimes 7)8$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a\otimes 1=a$	$7+0=7$ $\frac{1}{2}\otimes 1=\frac{1}{2}$
Inverso	$a+(-a)=0$	$a\otimes\frac{1}{a}=1$	$17+(-17)=0$ $13\otimes\frac{1}{13}=1$
Distributivo	$a(b+c)=ab+ac$		$5(8\otimes 9)=(5\otimes 8)+(5\otimes 9)$



Definiciones:

Los números **naturales** $\mathbb{N}$ son los que van del 1 hacia el infinito: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11… es decir, son números positivos que sirven como índice para contar los elementos de un conjunto.

Un número **entero** $\mathbb{Z}$ es cualquier elemento del conjunto formado por los números naturales, sus opuestos (versiones negativas de los naturales) y el cero. Estos son: Los naturales (o enteros positivos): +1, +2, +3, +4, +5... El cero, que no es ni positivo ni negativo.

Los números **racionales** $\mathbb{Q}$ hacen referencia a aquellos **a/b** que permiten conocer el cociente entre dos números enteros. También llamados fraccionarios.

El conjunto de los números **irracionales** I se representa por **a/b** y está formado por todos los números decimales cuya parte decimal tiene infinitas cifras periódicas, es decir, por todos los números que no se pueden representarse por el cociente de dos números enteros.

1.5 Potencias

Un número es un conjunto que expresa la cantidad de sus elementos. Esperamos que A siendo un número, sea un conjunto finito. Dado un conjunto **A**, a la colección de todos los subconjuntos de A se denominan conjuntos de potencia de A. Si lo escribimos así P(A); o otra notación más común es por ejemplo para el número dos: 2^A.

Si $A=\{1,2\}$, entonces P(A)={0,1,2,3}

El conjunto de potencias parte del conjunto vacío, un conjunto cuyo elemento único es el vació. 2^0=1 Todo conjunto de potencias contiene a la potencia cero, donde solo tiene un elemento. Todo número a la cero por tanto, es igual a uno.

Si A=1 la Potencia P(A)= 2^1=2

Si A=2 la Potencia P(A)= 2^2=4

Si A=3 la Potencia P(A)= 2^3=8

A es un conjunto finito de **n** elementos. P(A) es un conjunto finito de 2^n elementos. Si n=0 entonces P(A)=1. Esto es verdadero por inducción para todos los números elevados a la potencia cero.

Potencia de un número **a**, es el producto de este tantas veces **n**.

$a^n = a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet\bullet\bullet a = x$, **n** veces.

Donde **x**, es producto del factor **a, n** veces.

El signo de $(\pm a)^n$ es positivo si es par y negativo si es impar.

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$
$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Si P(A) + P(A) = $2^n + 2^n = 2^{2n}$

Si P(P(A))= 2^{n^2}

Si P(A) donde no tienen porque ser solo positivos **a** y **n**.

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Pero **a** y **n** no necesariamente deben ser solo número enteros positivos, podrían ser cualquier número real o complejo.

Un tema relacionado con las potencias es el de factorial de un número.

Sea $\left(n\right)_k = m!$ el número de formas de muestrear **k** veces desde un conjunto **n** de elementos. Donde el resultado m factorial es definido como:

$$m! = m \bullet (m-1) \ldots 2 \bullet 1$$

3!=3x2x1=6

12!=12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1=479001600

Cuando se desea trabajar con números elevados a una potencia de base 10, esta notación exponencial generalmente nos conduce a la notación científica de los números.

1.6 Radicación

La raíz $\sqrt[n]{a} = b$ (es un signo de radical), si y solo si $\mathbf{b^n = a}$. Donde **a** es la cantidad radicando, exigiendo esta ser positiva en los reales, caso contrario será una cantidad imaginaria y, **n** es el índice del radical o grado del radical. Es una operación inversa del exponencial. Si la expresión es racional la raíz es exacta y si no es irracional. Un radical tiene tantas raíces como el grado del radical. El valor aritmético del radical puede ser resuelto para un $\pm$. Por ejemplo $\sqrt{25} = \pm 5$. Además de las leyes de los exponentes agregaremos las de los radicales:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} \bullet \sqrt[n]{c}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

1.7 Notación científica

La notación científica es una forma de expresar números como el producto de dos números: un coeficiente y el número 10 elevado a una potencia. Es una herramienta muy útil para trabajar con números que son muy grandes o muy pequeños. Como ejemplo, 160,000,000,000 metros, una distancia muy grande. En notación científica, la distancia se escribe como 1.6×10^{11} m. El coeficiente es 1.6 y debe ser un número mayor o igual que 1 y menor que 10. La potencia de 10, exponente 11, tendría que multiplicar 1.6 por 10^{11} para obtener el número correcto. La notación científica se refiere a veces como notación exponencial. Un resumen de las unidades del Sistema Internacional de Unidades **SI** se da en la tabla a continuación. Observe que cuando son números pequeños el exponencial es negativo.

Prefijo	Unidad abreviada	Factor exponencial	Contidad	Ejemplo
giga	G	10^9	1,000,000,000	1 gigametro (Gm) = 10^9 m
mega	M	10^6	1,000,000	1 megametro (Mm) = 10^6 m
kilo	k	10^3	1000	1 kilometro (km) = 1000 m
hecto	h	10^2	100	1 hectometro (hm) = 100 m
deka	da	10^1	10	1 decametro (dam) = 10 m
		10^0	**1**	**1 metro (m)**
deci	d	10^{-1}	1/10	1 decimetro (dm) = 0.1 m
centi	c	10^{-2}	1/100	1 centimetro (cm) = 0.01 m
milli	m	10^{-3}	1/1000	1 millimetro (mm) = 0.001 m
micro	□	10^{-6}	1/1,000,000	1 micrometro (□m) = 10^{-6} m
nano	n	10^{-9}	1/1,000,000,000	1 nanometro (nm) = 10^{-9} m
pico	p	10^{-12}	1/1,000,000,000,000	1 picometro (pm) = 10^{-12} m

Para escribir un número grande en notación científica, primero debemos mover el punto decimal al primer número de la cifra entre1 y 10. Como mover el punto decimal cambia el valor, tenemos que aplicar una multiplicación por la potencia de 10 que nos resulte en un valor equivalente al original. Para encontrar el exponente, solo contamos el número de lugares que recorrimos el punto decimal. Ese número es el exponente de la potencia de 10. De la forma **a**x10^n donde **a** $1 \leq a < 10$ o $(-10 < a \leq -1)$ y **n** es un entero.

Por ejemplo:

54,000,000.00 a notación científica: $5.4x10^{7}$

0.0007 a notación científica: $7x10^{-4}$

El teorema fundamental del Aritmética dice: cada número natural o es primo o puede ser escrito como un producto de primos. Este teorema no lo abordaremos dado que esta fuera de nuestro alcance curricular, pero nos permite darnos cuenta que hay una factorización única para cada número natural y que la aritmética es un campo fascinante que no termina en este enfoque tan básico expuesto aquí.

1.8 El plano complejo

Los números reales $\mathbb{R}$ incluyen a los racionales e irracionales, que corresponden a todos los puntos de una línea infinita llamada línea real. Parece indiscutible que el cuadrado de un número negativo es positivo, puesto que el cuadrado de un número real es no negativo, cumpliendo la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Es Raphael Bombelli en 1526 quien introduce el número complejo, fue en su obra L'Algebra[28], donde se observa a simple vista que la ecuación anterior no tiene ninguna solución real (raíces). Sin embargo, Roger Penrose destaca que, al superarse concebirlo imposible, por un enfoque razonable que exige otro sistema de números que sea adecuado para tales propósitos, en que nos permita resolver la ecuación[29] $x^2 + 1 = 0$. Para este caso la ecuación algebraica general de grado **n,** donde $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales cualesquiera.

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

Este objetivo solo puede lograrse si conseguimos extender el sistema de números reales por otro que es parte, lo hacemos con un sistema de numeración de otro más extendido. $x^2+1=0$ es en cierto sentido la ecuación algebraica más simple sin raíces reales, un primer acercamiento evidente para nuestro problema es introducir una unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$, es decir, una nueva dimensión y entonces el plano numérico se extiende al número complejo de la forma:

$a+bi \ o \ \ a-bi$,

Donde **a** y **b** son números reales arbitrarios y la operación de estos números se define de manera natural como binomios $a+bx$ donde **x** es desconocida, salvo en este caso:

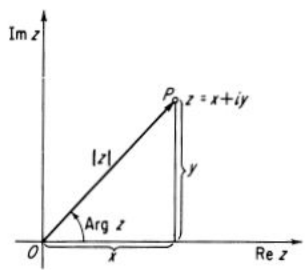
$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, \ i^5=i,...$

Sí b=0, observamos que solo está presente la línea real con sus características especiales. Asombrosamente como veremos resulta que una vez que permitimos que **x** tome valores complejos, la ecuación general algebraica siempre tiene una raíz, aunque los coeficientes $a_0, a_1, ..a_n$ sean números complejos, un resultado que es conocido como el **teorema fundamental del álgebra**: establece que todo polinomio de grado mayor que cero tiene una raíz.

Por número complejo nos referimos a una expresión $a+bi$, donde **a** y **b** son números reales e "**i**" es la unidad o dimensión imaginaria. Si **a** es la parte real de **c**, escrita como **Re c**, b es llamada la parte imaginaria de **c**, escrita como **Im c**. El número complejo cero es $0=0+0i$, donde las partes imaginaria y real valen cero. Por definición dos números c_1, c_2 son iguales solo sí

$$\operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re} c_2,$$
$$\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2,$$

Si Im c=0, c=a+bi se reduce a un número real, mientras que $\operatorname{Im} c \neq 0$, se dice que c es puramente imaginario. Los números complejos pueden ser representados geométricamente como puntos en el plano, un hecho que no solo es útil, sino prácticamente indispensable para la ingeniería y la aplicación científica moderna de este "mágico número", como lo llama Roger Penrose. Con la introducción de un sistema de coordenadas rectangulares en el plano, podemos identificar el número complejo $\mathbb{C}$, como $z = x + iy$, asociado con el punto P.



De esta manera, establecemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los números complejos y el conjunto de todos los puntos en el plano con una precisión infinita dado que las partes **Re** y **Im** son números racionales e irracionales. Claramente, con esta asignación, el conjunto de todos los números reales en el eje **x** y el conjunto de los números puramente imaginarios en el eje **y**, mientras que el conjunto de los números $\mathbb{C}$ corresponden al plano complejo o llamado plano **z**, en el entendido que tal plano **z** es construido por términos $z = x + iy$ que son los puntos que definen la densidad de la superficie **z**. Otra manera de representar al número complejo es usar el vector posición que une el origen con algún punto en el plano **z**[30]. El vector $\overrightarrow{0P}$ cuyo módulo o norma está dado por el valor absoluto del número complejo **z**, denotado por $|z|$. El ángulo de dirección entre el eje real y el vector $\overrightarrow{0P}$, es positivo solo si la rotación es en el sentido antihorario y negativo en el sentido contrario; se llama argumento del número complejo z y se denota por Arg z. En otras palabras $|z|$ y $Arg\, z$ son las coordenadas polares $r\ y\ \phi$.

$$x = \operatorname{Re} z = r\cos\phi$$
$$y = \operatorname{Im} z = rsen\phi$$

Por lo tanto:

$z = x + iy = r(\cos\phi + isen\phi)$

Esta última forma es la que se llama **forma trigonométrica** de un número complejo z. Claramente Arg z, se define solo en un múltiplo entero de 2π. Sin embargo, existe uno y solo un valor de Arg z, es decir de ϕ, que satisface la desigualdad:

$$-\pi < \phi < \pi$$
$$Arg\ z = \arg z + 2n\pi$$

donde **n** se extiende sobre los números enteros positivos y negativos incluyendo al cero.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$tag(\arg z) = \frac{y}{x}$$

Se requiere algún cuidado en invertir la expresión de la tangente, puesto que el arco tangente de un número real **x**, es escrito como Arc tan **x**, y se define solo para múltiplos enteros de π. Sin embargo, existe uno y solo un valor de Arc tan **x**, digamos un α que satisface la igualdad:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

y llamaremos al valor α, el valor principal del arco tangente de **x**, escrito arc tan **x**. Nosotros ahora podemos invertir la relación $tag(\arg z) = \frac{y}{x}$, obteniéndose:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & si\ \ x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & si\ \ x < 0,\ y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & si\ \ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Por otra parte, $\frac{y}{x}$ se convierte en infinito, claramente si tenemos:

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \quad si \quad x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \quad si \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

mientras que el caso z=0 es indeterminado como la versión Maya del cero.

Los números complejos:

$$x + iy$$
$$x - iy$$

se dice son números **complejos conjugados**, si uno de estos se denota por **z**, y el otro se denota por $\bar{z}$ o z^*.

Obviamente los puntos z y $\bar{z}$ son simétricos con respecto al eje real **x**.

$$\left|\bar{z}\right| = |z|$$
$$\overline{\left(\bar{z}\right)} = z$$
$$\bar{z}z = |z|^2$$

Por otra parte

$$\arg\ z = -\arg\ \bar{z}$$

A menos que **z** sea un número con la parte real negativa, en cuyo caso:

$$\arg\ z = \arg\ \bar{z} = \pi$$

La ecuación de Euler o llamada por otros, identidad de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\ senx$$

donde **i** es la unidad imaginaria. Tenga en cuenta que la identidad de Euler es poliédrica y a veces también se llama la fórmula sobre una curvatura Euler. La expresión equivalente:

$$ix = \ln(\cos x + isenx)$$

previamente había sido publicada por Costas (1714). El caso especial de la fórmula con $x = \pi$ da la identidad:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Una ecuación que conecta los números fundamentales π, e, 1 y 0 (cero), las operaciones fundamentales +, ×, y exponenciales, la relación más importante =, y nada más. Gauss comento que esta fórmula no era inmediatamente obvia.

La fórmula de Euler se puede demostrar utilizando un desarrollo de series:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$senx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{ix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\, senx$$

Aplicando a ambos miembros de la igualdad la exponencial:

$$\frac{1}{r}z = e^{i\theta}$$
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$
$$z = re^{i\theta}$$

Donde **r** representa la magnitud de **z** y es el argumento de **z**, usualmente llamado **arg** z.

$$si$$
$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$Entonces$$
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$
$$si$$
$$z = re^{i\theta} \quad entonces$$
$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$
$$z\bar{z} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} = r^2 e^0 = r^2$$

Potencias de complejos

Ejemplo 1. Determine el valor de $(1+i)^8$

Sabemos que:

$$z = (1+i)^8$$
$$z = a + bi$$
$$a = r\cos\theta$$
$$b = rsen\theta$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$Tan\,\theta = \frac{b}{a}$$
$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Solución:

$$Tan\,\theta = \frac{b}{a} = 1$$

$$\theta = Tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$z^8 = (1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}} =$$

$$z^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i2\pi}$$

$$usando \;\; fórmula \;\; de \; Euler$$

$$si \quad e^{i2\pi} = \cos 2\pi + isen2\pi$$

$$e^{i2\pi} = 1 + 0 = 1$$

$$z^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i2\pi} = \left(\sqrt{2}\right)^8 (1) = 16$$

Ejemplo 2. Determine el valor de $(\sqrt{3}-i)^6$

Solución:

$$z^6 = (\sqrt{3}-i)^6$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$b = -1$$

$$r = \sqrt{((\sqrt{3})^2 + (-1)^2)} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$Tan(\theta) = \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$\theta = Tan^{-1}(\frac{-1}{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$z^6 = \left(\sqrt{3}-i)\right)^6 = 2^6 e^{-i6\frac{\pi}{6}} = 2^6 e^{-i\pi}$$

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + isen(-\pi) = -1$$

$$z^6 = \left(\sqrt{3}-i\right)^6 = 2^6 e^{-i6\frac{\pi}{6}} = 2^6 e^{-i\pi} = 64(-1) = -64$$

Ejercicio 1. Determine el valor de $(3+2i)^4$ escribiendo el procedimiento.

Solución:

$z^4 = -119 + 120i$

La ecuación $z^n = 1$ donde **n** es el valor complejo de raíces n-esima de la unidad, es decir, se dice "*cada raíz tiene una magnitud de*". Ahora que:

$z = e^{i\theta} = e^{i2\pi k} = 1$

Usando la ecuación de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$$
$$transformando$$
$$z^n = 1 = e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + isen(2\pi k)$$
$$\Rightarrow z = 1^{1/n} = [\cos(2\pi k) + isen(2\pi k)]^{1/n}$$

Ahora nosotros usamos la fórmula **e** De Moivre que establece:

$\cos n\theta + isen\, n\theta = (\cos\theta + isen\theta)^n$

Así que:

$$z = [\cos(2\pi k) + isen(2\pi k)]^{1/n} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

Donde ***k*** es cualquier número entero. Ahora está claro que todas las **n** raíces de **z** deben estar en un círculo de radio 1, y las expresiones del tipo $\cos\theta + isen\theta$ son típicamente de la forma:

$z = r(\cos\theta + isen\theta)$

Pero en este caso r=1, por lo tanto:

$$z = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

1.9 Álgebra compleja

Se deduce de su tratamiento como binomiales, suma y producto de dos complejos:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

están dados por:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} \qquad (x_2{}^2 + y_2{}^2 \neq 0)$$

Álgebra compleja es un campo para el que se cumplen las propiedades axiomáticas de toda álgebra, dados los números complejos z_1, z_2, z_3

Conmutativa bajo +

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Conmutativa bajo $\otimes$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

Asociativa bajo +

$$(z_2 + z_1) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Asociativa bajo $\otimes$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Distributiva bajo la +

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_3 + z_1 + z_2$$

Distributiva bajo la $\otimes$

$$z_1 \bullet z_2 \bullet z_3 = z_3 \bullet z_1 \bullet z_2$$

Elemento neutro bajo la +

$$z_1 + 0 = z_1$$

Elemento neutro bajo la $\otimes$

$$z_1 \otimes 1 = z_1$$

Inverso simétrico $\otimes$

$$z_1{}^{-1} = \frac{1}{z_1}$$

$z_1 z_1^{-1} = 1$

$$z^{-1} = (x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Hasta lo visto aquí, uno podría representar a los números complejos como pares ordenados (sin emplear la unidad imaginaria i).

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)...,$

donde x_n, y_n son números reales, entonces multiplicación y adición pueden ser representadas:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 \;\; , \;\; y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \;\; , \;\; x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Con este enfoque, la relación $i^2 = -1$ tiene como análogo:

$(0,1)(0,1) = (-1,0)$

Hemos visto que la explicación de la extensión de los números reales a los números complejos no es menos exquisita que la extensión de los números enteros a los racionales y su posterior extensión de los racionales a los irracionales implicados en el concepto de una línea continua.

Ejercicios aritmética de complejos

Ejercicios 1: Represente los siguientes números complejos en su forma trigonométrica:

a. 1+i
b. -1-i
c. 1-i
d. $1 + i\sqrt{3}$

Unidad 2. Álgebra arábiga

2. Introducción[31]

Los pensadores de la Edad Media, realizaron muchas de las innovaciones matemáticas más notables, surgieron en los territorios islámicos de lo que hoy es Irak e Irán[32]. Los estudios en esta región sentaron las bases del desarrollo del álgebra árabe, que significo: "encuentro de partes rotas". Estos conocimientos centran las bases de la álgebra moderna, que utiliza símbolos abstractos, digamos variables **x** y **y**, para representar cantidades que pueden tomar valores numéricos y ser manipuladas matemáticamente. En este momento de la historia, se da la función de número y geometría, creando el álgebra arábiga.

Para el devoto Kepler, Dios era el "arquitecto del universo" y lo había creado de acuerdo con un diseño para que la razón humana lo comprendiera, empleo la geometría. Un tema que Kepler consideraba divino[33]. Para Galileo a menudo, comparaba las predicciones científicas apoyadas en matemática, como observaciones hechas sobre el mundo real. Esta insistencia le convirtió a Galileo en el padre de la ciencia moderna. Su pensamiento formo parte de una tendencia cultural, la de apuntalar la vida próspera del comercio y el arte, a través de nuevos métodos de contabilidad, cálculo y geométrica en la arquitectura. La idea más clara de considerar a las leyes fundamentales de la naturaleza expresiones matemáticas, la aporto el francés René Descartes, cuyo trabajo describió la naturaleza y desarrollo el estilo de pensamiento objetivo, donde una supuesta relación entre los objetos que exigen, puede ser referida por un discurso a base de proposiciones. Aquí nació el lenguaje objetivo de la ciencia moderna[34].

Pero es Newton quien crea una arquitectura matemática que involucra a los desarrollos matemáticos conocidos hasta entonces[35]. Combina la noción de función, límite, espacio geométrico, infinito, cero maya, números reales, permitiendo hacer cálculos con infinitesimales, en la frontera de la nada y el todo. Puede que Newton jamás habría escrito "Principia" si no fuera por la influencia e iniciativa de Edmond Halley, ahora mejor conocido por el cometa que lleva su nombre en su honor. De hecho "Principia" fue una obra correctiva de la narrativa filosófica de Descartes. Centro enteramente al mundo real, en ser descrito matemáticamente, tanto en generalidad como con precisión asombrosa. La fuera de gravedad en los planetas, Newton logro expresar a la civilización que el cielo y la tierra están gobernados por las mismas leyes de la naturaleza. Gottfried Leibniz de manera independiente también llego al cálculo infinitesimal, capaz de lidiar con cantidades físicas que no son constantes y varían continuamente en el espacio y el tiempo; convirtiendo a la técnica matemática del cálculo en la herramienta más poderosa para el desarrollo científico y de ingeniería. El razonamiento de derivadas e integrales de funciones permitió que la imaginación posterior a esta era, se aventure a través de las estrellas y los átomos con asombrosa precisión.

En nuestros días, la llegada de "x" en la escena escolar, representa para los jóvenes estudiantes el punto de partida en el que las matemáticas están más allá de la aritmética, adquiriendo un lenguaje algebraico e instalando el pensamiento superior en la idea de cuerpo cerrado bajo una operación binaria de suma y multiplicación. De aquí en adelante la ciencia moderna se basaría en sus investigaciones en el álgebra de símbolos que representan cantidades de interés. El álgebra es la herramienta a través de la cual se revelan relaciones físicas exactas, incluida la famosa ecuación $E=mc^2$.

Existen varias álgebras, bolean, vectorial, compleja, diferencial, lineal y arábiga entre muchas otras. El álgebra sustenta la investigación sistemática moderna. Su contribución moderna en ingeniería de software sería imposible sin álgebra. Ya hemos dicho que álgebra refiere en árabe a "reencuentro de partes rotas". Pero es la manipulación algebraica de la escritura moderna en las matemáticas, la desarrollada hasta el siglo

XVII cuando se da más luz sobre la aritmética y la existencia de papel para ensayar técnicas y métodos algebraicos. Los símbolos algebraicos X y Y, son manipulados con las leyes de la aritmética. El argumento sustenta que todo lo que hacemos con números es válido en relación a la manipulación de variables, con consecuencias, estas reglas se amplían a todas las demás álgebras por venir.

Para aprovechar el potencial del álgebra, necesitamos ser capaces de movernos dentro de su simbología de forma desinhibida, haciéndonos libres en habilidad en su uso en operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Para eso necesitamos un sistema numérico adecuado para el propósito. Y sin rechazar cantidades negativas y de la forma (a/b) cociente, además, de tratar a cero como un número.

La operación matemática 3 + 2, que es la suma, es de fácil comprensión, y aún más fácil es su ejecución. A esta expresión, tres más dos lo asociamos a la idea natural que teniendo tres objetos le agregamos dos objetos, para obtener un total de cinco objetos. Lo que queremos decir con esto, que las operaciones matemáticas, por lo general, tienen una interpretación en situaciones reales. Por ejemplo, la operación 2 + 1, puede significar que tengo dos balones de futbol, y me han regalado 1 balón de futbol, lo que en total hace 3 balones de futbol.

Las matemáticas entonces, sirven para la vida real, sucede a veces, que no se puede estar estudiando caso a caso las diferentes problemáticas que se pueden resolver con las operaciones matemáticas, es entonces que se inventa un nuevo lenguaje llamado Álgebra. Esta álgebra consiste en asociar a los números las unidades que representa. Por ejemplo, la expresión tengo siete billetes de mil pesos por 7m, donde la letra **m** representa a un billete de mil pesos. De manera que la expresión algebraica: 7m + 5m = 12m significa, tener doce billetes de mil pesos. De igual manera, es posible que la letra **m** signifique un balón de futbol, entonces 7m + 5m = 12m, significa 12 balones de futbol.

El álgebra es una rama de las matemáticas donde se consideran las cantidades de forma general, para lo cual se usan letras, generalmente las últimas del abecedario, en álgebra aparecen números, que son cantidades conocidas y letras que representan tanto a cantidades bien definidas, como a incógnitas o cantidades desconocidas.

Por ejemplo, el peso de un cuerpo se calcula mediante la fórmula: $w = mg$ aquí la letra w representa al peso, m a la masa, estas son dos cantidades desconocidas que se relacionan de manera proporcional y g representa a una constante, la de la aceleración debida a la gravedad en la tierra $g = 9.81 m/s^2$.

2.1 Lenguaje algebraico

Para resolver problemas matemáticos por medio del álgebra es necesario traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico. A continuación, se muestran algunos ejemplos de expresiones en lenguaje común traducidas a lenguaje algebraico:

Un número cualquiera= x
El doble de un número=$2x$
La tercera parte de un número=$\frac{x}{3}$
La diferencia entre dos números=$x - y$
El cuadrado de la suma de dos números distintos=$(a + b)^2$
El producto de la suma por la diferencia de dos números=$(x + y)(x - y)$
El cuadrado del doble de un número menos el triple de otro= $(2x - 3y)^2$
Un número más su consecutivo=$x + (x + 1)$

Al traducir encontramos palabras claves como doble que lo traducimos como multiplicar por dos, la tercera parte, dividir entre tres, la diferencia equivale a la resta, el cuadrado de a, elevar a la potencia dos, el producto a la multiplicación.

Términos en álgebra[36]

Es cada parte de una expresión algebraica cuando estos están separados por un signo.

La parte numérica de un término que contiene una variable se llama coeficiente de la variable.

Término algebraico semejante

Los términos algebraicos semejantes son aquellos que contienen las mismas variables, tales como 7x y 11x o como 3a y 7a. Un término sin una variable se llama constante (una constante es una expresión que tiene un valor fijo). Los términos constantes también se llaman términos semejantes.

Término algebraico y sus partes

Una expresión algebraica es una combinación de números y símbolos (que representan números) unidos por las operaciones elementales como la suma, resta, multiplicación y división.

Por ejemplo: $9x^5y$, $\frac{-8x^2}{y}$ son expresiones algebraicas

Un término es una expresión algebraica que no está separada por el signo más ni por el signo menos.
Por ejemplo: 5pq, -234abcd, $\frac{7}{9}xy^3$

Grado absoluto de un término algebraico[37]

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables

Ejemplo: $-23x^3y^5$ su grado absoluto es 3+5=8

Propón la siguiente adivinanza a un amigo:

a) Piensa un número
b) Multiplícalo por 2
c) Añade 4 al resultado
d) Al resultado anterior multiplícalo por 3
e) Resta doce al resultado anterior
f) Divide lo obtenido entre 6
g) Réstale el número que pensaste

¡Te quedó cero!

Si llamamos x al número inicial, podemos escribir las expresiones algebraicas que obtenemos en cada paso:

a) $\boldsymbol{x}$
b) $2x$
c) $2x + 4$
d) $3(2x + 4) = 6x + 12$
e) $6x + 12 - 12 = 6x$
f) $\frac{6x}{6} = x$
g) $x - x = 0$

Como ves, podemos resolver problemas manejando expresiones algebraicas. A estas letras se les llama incógnitas, o indeterminadas (por norma, las letras se ordenan alfabéticamente).

Por ejemplo: $3x^2+6xy+3y^2$

Las expresiones algebraicas nos permiten traducir el lenguaje ordinario.

Una expresión algebraica está en forma reducida o simplificada si no tiene términos semejantes ni paréntesis, esto se llama reducción o simplificación de términos de una expresión.

Ejemplo: reducir la expresión 8(x+5).

8(x+5) = 8(x)+8(5) =8x+40

Reduce -3t+11-4t

Los términos semejantes son -3t y –4t
∴ -3t+11-4t = 11-3t-4t = 11-7t

En la siguiente expresión algebraica 5y+4+6y.
Identifica los términos, términos semejantes, constantes, coeficientes y factores; una vez identificada la estructura de la expresión simplifícala.

Términos: 5y, 4, 6y

Términos semejantes: 5y, 6y

Constantes: 4

Coeficientes: 5, 6

Factores: 4, 5, 6, y

Expresión algebraica simplificada: 11y+4

Tipos de expresiones algebraicas[38]

a) Monomio: es una expresión algebraica formada por un solo término, como 4x, $3a$, ax , $\frac{1}{5}x$, $\frac{a}{x}$, ax^2, $\sqrt{ax}$, etc.
b) Binomio: es una expresión algebraica formada por dos términos, como$(3+7x)$, (3a+4x), $(ax-\frac{1}{5}x)$,$(ax^2 \pm \sqrt{ax})$, etc.
c) Trinomio: es una expresión algebraica formada por tres términos, como $(4+6x-ax)$, $(45 \pm \sqrt{ax} \pm ax^2)$, etc.
d) Polinomio: es una expresión algebraica formada por dos términos o más.

Los binomios y trinomios son polinomios con nombres especiales.

Clasificación de expresiones algebraicas[39]

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar en función del tipo de operaciones que afectan a su parte literal en: enteras, racionales, e irracionales.

I. Expresión algebraica entera: es aquella en la cual no hay ninguna letra en el denominador. En el caso contrario, dicha expresión algebraica se llama fraccionaria.

Ejemplo: $-3a^3bx^2 - \frac{5}{7}ab^2c^5$, etc.

II. Expresión algebraica racional: es aquella en la cual no hay ninguna letra bajo un signo radical. En caso contrario, la expresión algebraica correspondiente recibe el nombre de irracional.

a) Expresiones algebraicas racionales: son términos que no tienen literal en el denominador.

Ejemplo: $5a^3$, $(a+b)\sqrt{2}$, $\frac{2a+3b}{2}$, etc

b) Expresión algebraica fraccionaria: son términos que tienen parte literal en el denominador.

Ejemplo: $\frac{5a^2b^3c}{3d}$, $-\frac{1}{x}$, $3a^3b^2c - \frac{1}{3d}$, etc.

III. Expresión algebraica irracional: son términos que poseen radicales.

Ejemplo: $\sqrt{a^2-b^2}$, $6\sqrt[4]{2x^2y^3}$, $\frac{2xy}{\sqrt[5]{z^3}}$

Valor numérico de una expresión algebraica[40]

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al efectuar las operaciones indicadas después de haber sustituido las letras por números, a cada letra, un número único que puede ser el mismo para diferentes letras, pero no puede ser distinto para la misma letra en posiciones distintas.

El valor numérico de una expresión algebraica depende de los valores atribuidos a sus letras. Una expresión algebraica puede tener diversos valores numéricos al variar los valores atribuidos a las letras.

Ejemplo: $3a^3b^2c-\frac{1}{3}d$

Para $a=-1, b=-2, c=-1/2 \;\; y \;\; d=-6$

$$3a^3b^2c-\frac{1}{3}d = 3(-1)^3(-2)^2(-\frac{1}{2})-(\frac{1}{3})(-6) = 3(-1)4(-\frac{1}{2})+2 = 6+2 = 8$$

Equivalencia de expresiones algebraicas

Son aquellas expresiones que tienen el mismo valor para todas las sustituciones permisibles. Por ejemplo, algebraicamente x+2x=3x, por lo que estas dos expresiones son equivalentes.

Otro ejemplo son las expresiones $3(x+4)$ y $3x+12$, son expresiones equivalentes, porque tienen el mismo valor sin importar cuál sea el valor de x.

2.2 Operaciones algebraicas[41]

Las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con las expresiones algebraicas enteras son suma, resta, multiplicación y división.

Suma

Las sumas de expresiones algebraicas enteras se efectúan mediante la agrupación de términos semejantes. Solo se pueden sumar monomios y el resultado es otro monomio.

Ejemplo:

Suma de expresiones algebraicas	Resultado
$3x+x$	$4x$
$5y^2+3y^2$	$8y^2$
$4x^2+3x$	No se puede simplificar ya que 4x2 y 3x no son términos semejantes
$2x+3y+3x+5y$	Agrupando los términos semejantes en **x** y en **y** tenemos: $(2x+3x)+(3y+5y)=5x+8y$

Otra forma en que comúnmente se realizan las sumas es de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcr} 2x & + & 3y \\ x & + & y \\ \hline 3x & + & 4y \end{array} \qquad \text{o} \quad (2x+3y)+(x-y)=2x+3y+x-y=(2x+x)+(3y-y)=3x+2y$$

Como podemos ver, se quitaron primero los paréntesis y después se agruparon los términos semejantes. La suma se puede realizar con más de dos expresiones algebraicas, por ejemplo, podemos sumar *3x + 4y* con *2x + 5y* y *4y*, como podemos observar en la última expresión, a diferencia de las otras dos, no se encuentra ningún término con la variable **x**, sin embargo, la operación se puede realizar como veremos:

$$\begin{array}{rcr} 3x & + & 4y \\ 2x & + & 5y \\ & + & 4y \\ \hline 5x & + & 13y \end{array} \qquad \begin{aligned} \text{o} \quad (3x+4y)+(2x+5y)+4y &= 3x+4y+2x+5y+4y \\ &= (3x+2x)+(4y+5y+4y) \\ &= 5x+13y \end{aligned}$$

Con la práctica las operaciones se hacen de manera inmediata sin tener que escribir las agrupaciones, sin embargo, el llevar a cabo las agrupaciones ayuda a adquirir la confianza en las operaciones.

Resta

La resta de dos operaciones algebraicas se realiza de manera similar a como se hace con la suma de operaciones algebraicas, es decir, se realizan las restas entre dos términos semejantes.

Ejemplo: restar 2x+2y de x–y.

$$-\begin{array}{rcr} x & - & y \\ \hline 2x & + & 2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & - & y \\ \hline -(2x & + & 2y) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & - & y \\ -2x & - & 2y \\ \hline -x & - & 3y \end{array}$$

$$\text{o}\quad (x-y)-(2x+2y)=x-y-2x-2y=(x-2x)+(-y-2y)=-x-3y$$

Restar $2x^2+2y+z$ de x^2+2y.

$$-\begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ \hline 2x^2 & + & 2y & + & z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ \hline -(2x^2 & + & 2y & + & z) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ -2x^2 & - & 2y & - & z) \\ \hline -x^2 & - & 0 & - & z \end{array}$$

$(x^2+2y)-(2x^2+2y+z)=x^2+2y-2x^2-2y-z=(x^2-2x^2)+(2y-2y)+z=-x^2-z$

Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios se efectúa multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro y sumando todos los productos obtenidos, reduciendo términos semejantes, el resultado de la suma de estos productos genera un nuevo polinomio. Generalmente se ordenan ambos polinomios en orden creciente o decreciente.

La multiplicación se realiza de la forma siguiente:

a) Se realiza la multiplicación como ya se describió de los coeficientes *A* por *B*, si es un entero se escribe directamente en el resultado, si por el contrario, no lo es, se acostumbra dejarlo como fracción.

b) Si tienen las mismas variables ambos polinomios, se aplican las propiedades de los exponentes para expresar las variables con sus respectivas potencias en el resultado.

Multiplicar los siguientes monomios: 4x por 6

$$\begin{array}{r} \times \quad 4x \\ 6 \\ \hline 24x \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x)(6)=24x$$

Multiplicar los siguientes monomios 4x por 6x.

$$\begin{array}{r} \times \quad 4x \\ 6x \\ \hline 24x^2 \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x)(6x)=24x^2$$

Multiplicar el monomio 6 por el binomio 4x+6.

$$\begin{array}{rcr} \times \quad 4x & + & 6 \\ 6 & & \\ \hline 24x & + & 36 \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x+6)(6)=24x+36$$

Multiplicar el monomio 3x por el binomio 4x-6y.

$$\begin{array}{rcr} \times \quad 4x & - & 6 \\ 3x & & \\ \hline 12x^2 & - & 18x \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x-6)(3x)=24x^2+18x$$

Multiplicar el monomio $3x^2$ por el binomio -4x-6y.

$$\begin{array}{rrrr} \times & -4x & - & 6y \\ & 3x^2 & & \\ \hline & -12x^3 & - & 18x^2y \end{array} \qquad \text{o} \quad (-4x-6)\,(3x^2)=-12x^3-18x^2y$$

Multiplicar el binomio $3x^2+3$ por el binomio 4x-6y.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \times & 4x & - & 6y & & & & \\ & 3x^2 & + & 3 & & & & \\ \hline & 12x^3 & - & 18x^2y & & & & \\ & & & & + & 12x & - & 18y \\ \hline & 12x^3 & - & 18x^2y & + & 12x & - & 18y \end{array}$$

$$\text{o} \quad (4x-6y)\,(3x^2+3)=12x^3+12x-18x^2y-18y$$

Se ordena el polinomio resultante alfabéticamente, así como el grado de forma decreciente:

$(4x-6y)\,(3x^2+3) = 12x^3-18x^2y+12x-18y$

Multiplicar el trinomio $x^2+2x–1$ por el siguiente trinomio de grado dos x^2+2x+1

$$
\begin{array}{rccccccccc}
\times & x^2 & + & 2x & - & 1 & & & & \\
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & & & & \\
\hline
 & x^4 & + & 2x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & & & 2x^3 & + & 4x^2 & - & 2x & & \\
 & & & & & x^2 & + & 2x & - & 1 \\
\hline
 & x^4 & + & 4x^3 & + & 4x^2 & & 0 & - & 1
\end{array}
$$

- $(x^2+2x-1)(x^2+2x+1) = x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x-x^2-2x-1$
  $= x^4+(2x^3+2x^3)+(x^2+4x^2-x^2)+(2x-2x)-1$
  $= x^4+4x^3+4x^2-1$

División

La división se realiza de la forma siguiente:

a) Se realiza la división de los coeficientes ***A*** entre ***B***, si es un entero se escribe directamente en el resultado, si por el contrario, no lo es, se acostumbra dejarlo como fracción.

b) Si tienen las mismas variables ambos polinomios, se aplican las propiedades de los exponentes para expresar las variables con sus respectivas potencias en el resultado.

c) Si no son iguales las variables del numerador con las del denominador, generalmente se dejan como aparecen, aunque también se pueden expresar las variables del numerador subiéndolas al numerador con potencias negativas.

I. División de dos monomios: la división de dos monomios se encuentra hallando el cociente de los coeficientes y el de las variables, el resultado es el producto de los cocientes de los coeficientes por el de las variables.

Ejemplo: dividir $32xy^2$ entre $2xyz$

$$\frac{32xy^2}{2xyz} = \frac{32}{2} \times \frac{x}{x} \times \frac{y^2}{y} \times \frac{1}{z} = 16 \times 1 \times y \times \frac{1}{z} = \frac{16y}{z}$$

Dividir: $32xy^2z$ entre $2xyz$

$$\frac{32xy^2z}{2xyz} = \frac{32}{2} \times \frac{x}{x} \times \frac{y^2}{y} \times \frac{z}{z} = 16 \times 1 \times y \times 1 = 16y$$

II. División de un polinomio entre un monomio: se realiza dividiendo cada termino del polinomio entre el monomio y luego se simplifica la expresión algebraica.

Dividir a x^2+bx entre x

$$\frac{ax^2 + bx}{x} = \frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} = ax + b$$

Dividir ax^2+bx+c entre dx

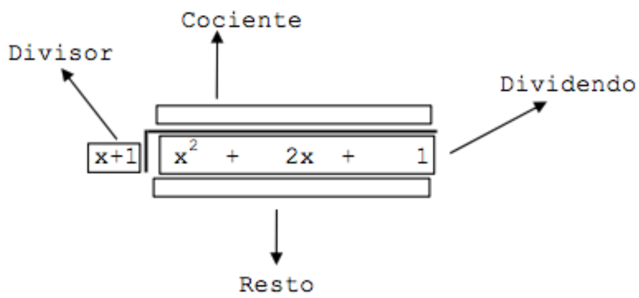
$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx} = \frac{ax^2}{dx} + \frac{bx}{dx} + \frac{c}{dx} = \frac{ax}{d} + \frac{b}{d} + \frac{cx^{-1}}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}x^{-1}$$

Dividir $2x^5yx+3x^3y^2z+xy^2z^2$ entre xyz

$$\frac{2x^5yz + 3x^3y^2z + xy^2z^2}{xyz} = \frac{2x^5yz}{xyz} + \frac{3x^3y^2z}{xyz} + \frac{xy^2z^2}{xyz} = 2x^4 + 3x^2y + yz$$

III. División entre polinomios: para la división de dos polinomios (por la división larga), se emplea una serie de pasos que mediante el siguiente ejemplo se describirán:

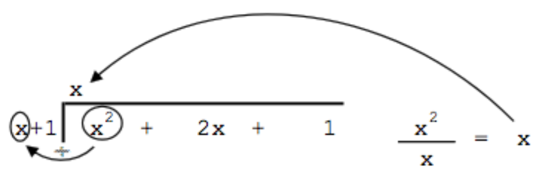
Dividir $2x+1+x^2$ entre $1+x$



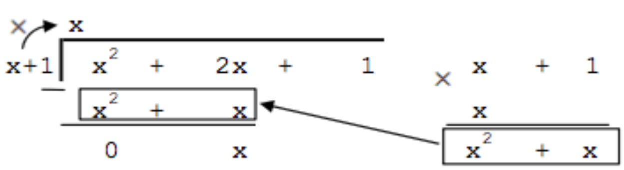
a) Se ordenan los términos de ambos polinomios según las potencias decrecientes (o crecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.

x^2+2x+1 y $x+1$

b) Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer término del cociente.

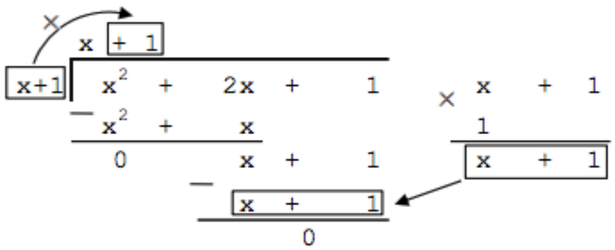


c) El primer término del cociente se multiplica por el divisor, para después restar este producto del dividendo.

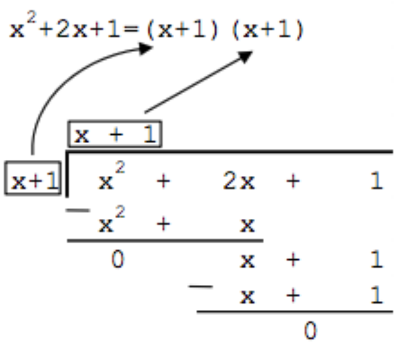


d) Una vez realizada esta resta, ahora se centra la atención en este resultado (1er residuo parcial), el cual es un monomio que se completa a un polinomio con un número de términos similaes a los del divisor y para lo cual se bajan los términos siguientes necesarios del dividendo. Este polinomio recién formado se divide entre el divisor para formar el segundo término del cociente.

e) El divisor se multiplica por el 2º término del cociente, para después restar este producto del polinomio recién formado. Realizar esto de manera consecutiva hasta reducir el residuo a cero o a un polinomio de grado y extensión menor que el divisor.



f) Si el residuo es cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo.



También es posible presentar la operación de manera racional:

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1} = \text{cociente} + \text{residuo} = (x+1)+0 = x+1$$

Como podrás darte cuenta la división larga se parece mucho a las divisiones aritméticas.

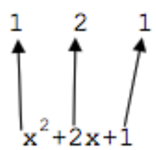
División sintética

Si el divisor es un polinomio de primer grado de la forma x–c donde **c** es una constante, esta constante puede ser inclusive un número complejo, sin embargo, aquí **c** es una constante real. Ahora explicaremos la división sintética, realizando de manera paralela el ejercicio anterior. El algoritmo de la división sintética se realiza de acuerdo a los pasos que se desarrollaran en el siguiente ejemplo:

Aplica la división sintética para dividir x^2+2x+1 entre $x+1$.

Recordar que el divisor es $x+1$ y el dividendo es x^2+2x+1

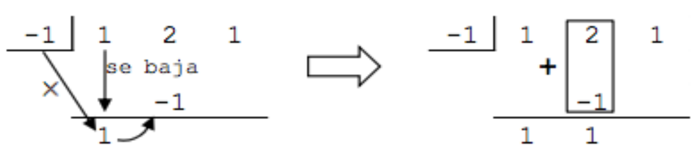
a) Listar los coeficientes del dividendo en orden decreciente de potencias de x, escribiendo 0 para cada potencia de x que falte.



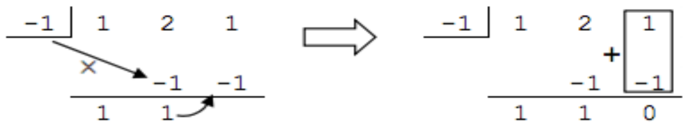
b) Colocar como prefijo de esta lista al valor de **x** que hace cero al divisor.

En este caso el prefijo es x=–1, que proviene del divisor cuando este lo hacemos cero; es decir: x+1=0 y la solución en x se encuentra despejando x ∴x=–1.

c) Escribir en la parte inferior el coeficiente principal de la lista, multiplicarlo por el prefijo y sumar el producto al siguiente coeficiente de la lista.

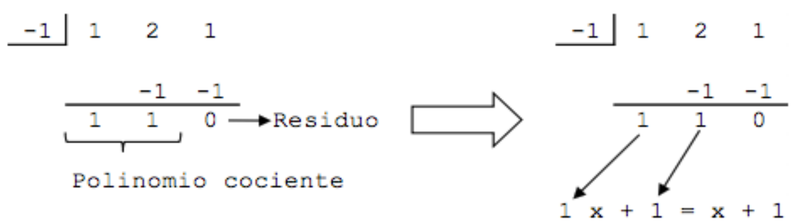


d) Multiplicar por el prefijo la suma obtenida en el paso anterior y sumar el producto al siguiente coeficiente. Repetir este paso hasta haber usado todos los coeficientes de la lista.

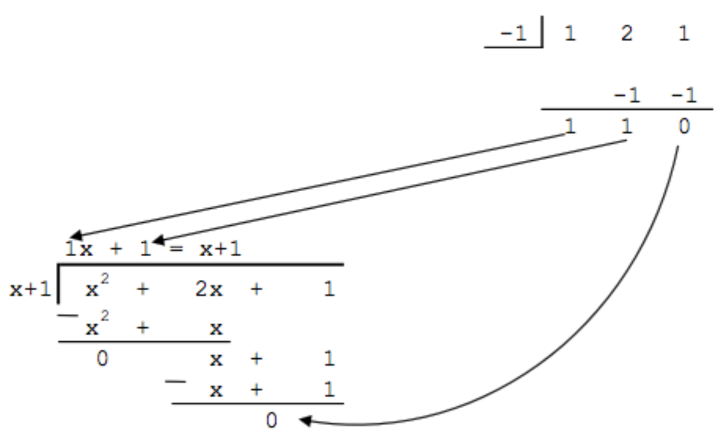


g) Todos los elementos del tercer renglón excepto el último son los coeficientes del polinomio cociente, en orden decreciente de potencias, se comienza por una potencia menor a la que tiene el dividendo. El último elemento de este renglón es el residuo. Si el residuo es cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo.

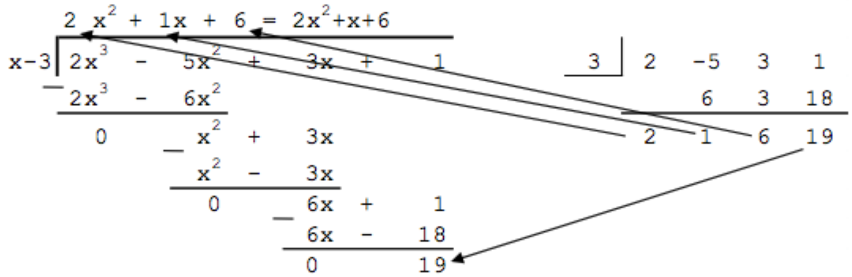
Dividendo = x^2+2x+1 y es de grado 2, el cociente de la división debe ser un grado menos, o sea, de grado 1, y el residuo es igual a cero; esto es:



Comparación de un ejercicio por división larga y división sintética:



Encontrar el cociente entre $2x^3-5x^2+3x+1$ *y* $x-3$ por el algoritmo de la división larga y por división sintética.



Como podemos ver el residuo es diferente de cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo más el residuo resultante; esto es:

$2x^3-5x^2+3x+1 = (2x^2+x+6)\ (x-3)+19$

También es posible presentar la operación de manera racional:

$$\frac{2x^3-5x^2+3x+1}{x-3} = (2x^2+x+6)+19$$

Las 4 operaciones básicas que se pueden realizar con las expresiones algebraicas racionales son las mismas que se analizaron con expresiones algebraicas enteras.

Suma

Las sumas de expresiones algebraicas racionales se efectúan mediante la agrupación de términos semejantes. Solo se pueden sumar monomios y el resultado es otro monomio.

Sumar $\frac{2a}{3b}+\frac{4a}{5b}$

$$\frac{2a}{3b}+\frac{4a}{5b}=\frac{6a}{8b}=\frac{3a}{4b}$$

Efectúa la siguiente operación:

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

Primero se evalúa el mcm (máximo común múltiplo) de los denominadores:

$c-d=c-d$

$c+d=c+d$

$c^2-d^2=(c+d)(c-d)$

$\therefore$ mcm $=(c+d)(c-d)$

Segundo, se resuelve el primer término de la expresión algebraica racional, para lo cual, el mcm se divide por el denominador de la primera fracción:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c-d)}=c+d$$

Tercero, el cociente de la división se multiplica por el numerador de dicha fracción:

$$(c+d)(a+b)=(ac+bc+ad+bd)$$

Y así se resuelve cada término.

Para el 2º término:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c+d)}=c-d;\quad (c-d)(a-b)=(ac-bc-ad+bd)$$

Para el 3er. término:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c^2-d^2)}=\frac{(c+d)(c-d)}{(c+d)(c-d)}=1;\quad (1)\left(a^2-b^2\right)=(a^2-b^2)$$

La operación quedaría así:

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{(ac+bc+ad+bd)+(ac-bc-ad+bd)+(a^2-b^2)}{c^2-d^2}$$

Se agrupan los términos semejantes, eliminando los que sean iguales pero de diferente signo.

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{ac+bc+ad+bd+ac-bc-ad+bd+a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{ac+bd+ac+bd+a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{2ac+2bd+a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

Ordenando por grado:

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+2ac+2bd-b^2}{c^2-d^2}$$

Resta

Para la resta de expresiones algebraicas racionales se presentan los mismos casos que para la suma y su solución es la misma, únicamente se prevé el cambio del signo más (+) por el de menos (–).

Multiplicación

El producto de expresiones algebraicas racionales se realiza al igual que como se estudió en las operaciones básicas con expresiones algebraicas enteras. En la multiplicación de fracciones, el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas, pero en este caso en particular se factorizan[42] y se simplifican[43], como se describe a continuación en el siguiente ejemplo.

Realizar el siguiente producto.

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)$$

Factorizar lo que sea posible del numerador y denominador de cada término de la expresión algebraica:

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\left[\frac{3(4x^2-1)}{15}\right]\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)$$

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\frac{(4x^2-1)(3)(1)(5)}{(15)(2x+1)(2x+1)}=\frac{(4x^2-1)(15)}{(2x+1)(2x+1)(15)}$$

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x+1)(2x+1)}=\frac{(2x-1)}{(2x+1)}$$

Realizar el siguiente producto:

$$\left(\frac{a}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{t+b}\right)\left(\frac{t^2+2tb+b^2}{a}\right)$$

Factorizar lo que sea posible del numerador y denominador de cada término de la expresión algebraica.

$$(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2$$

$$\left(t^2 + 2tb + b^2\right) = (t + b)^2$$

Se sustituyen estos valores en la expresión algebraica original.

$$\left(\frac{a}{a^2 + 2ab + b^2}\right)\left(\frac{a + b}{t + b}\right)\left(\frac{t^2 + 2tb + b^2}{a}\right) = \left[\frac{a}{(a + b)^2}\right]\left(\frac{a + b}{t + b}\right)\left[\frac{(t + b)^2}{a}\right]$$

$$\left(\frac{a}{a^2 + 2ab + b^2}\right)\left(\frac{a + b}{t + b}\right)\left(\frac{t^2 + 2tb + b^2}{a}\right) = \frac{(a + b)(t + b)^2(a)}{(a + b)^2(t + b)(a)} = \frac{t + b}{a + b}$$

División

Para dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias, es suficiente con multiplicar la primera con el inverso de la segunda y luego se reducen términos semejantes resultantes del producto.

Efectúa la siguiente división.

$$\frac{1}{3}\left(a^2 - b^2\right) \div \frac{1}{6}(a + b)$$

$$\frac{\left(a^2 - b^2\right)}{3} \div \frac{(a + b)}{6} = \frac{\left(a^2 - b^2\right)}{3} \times \frac{6}{(a + b)} = \frac{6\left(a^2 - b^2\right)}{3(a + b)} = \frac{2(a + b)(a - b)}{(a + b)} = 2(a - b)$$

Efectúa la siguiente división:

$$\frac{3x - 27}{x^2 - 9} \div \frac{x - 9}{x^2 + 18x + 9}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes de acuerdo a recomendaciones de ejemplos del tema anterior y se reducen términos semejantes.

$$\frac{3x-27}{x^2-9} \div \frac{x-9}{x^2+18x+9} = \frac{3x-27}{x^2-9} \times \frac{x^2+18x+9}{x-9} = \frac{3(x-9)}{x^2-3^2} \times \frac{(x+3)^2}{x-9}$$
$$= \frac{3(x+3)^2(x-9)}{(x+3)(x-3)(x-9)}$$

$$\frac{3x-27}{x^2-9} \div \frac{x-9}{x^2+18x+9} = \frac{3(x+3)}{(x-3)}$$

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

a) De ser posible se factoriza[44] el numerador y denominador de la fracción.

b) Se reducen términos semejantes resultantes de la factorización del paso anterior

Ejemplo: simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^3-16x}{2(x^2-8x+16)}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes tanto en el numerador como en el denominador de la fracción y se reducen términos semejantes.

$$\frac{x^3-16x}{2(x^2-8x+16)} = \frac{x(x^2-16)}{2(x^2-8x+16)} = \frac{x(x^2-4^2)}{2(x-4)^2} = \frac{x(x+4)(x-4)}{2(x-4)^2} = \frac{x(x+4)}{2(x-4)}$$

Simplificar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{a^2+ab}{a^2+ab-ac-bc}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes tanto en el numerador como en el denominador de la fracción y se reducen términos semejantes.

$$\frac{a^2+ab}{a^2+ab-ac-bc}=\frac{a(a+b)}{(a^2+ab)+(-ac-bc)}=\frac{a(a+b)}{a(a+b)+c(-a-b)}$$
$$=\frac{a(a+b)}{a(a+b)-c(a+b)}$$

$$\frac{a^2+ab}{a^2+ab-ac-bc}=\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-c)}=\frac{a}{a-c}$$

Potencia de expresiones algebraicas enteras y racionales

La exponenciación es una multiplicación de varios factores iguales, es decir, una multiplicación abreviada, y para evaluarla es suficiente con aplicar la regla de multiplicación tantas veces como lo indique el exponente.

Ejemplo: evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.
$(a+b)^2$
$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.
$(a-b)^2$

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.
$(a+b-c)^3$

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
1\ \times & a & + & b & - & c & & & & & & \\
2 & a & + & b & - & c & & & & & & \\
\hline
 & a^2 & + & ab & - & ac & & & & & & \\
 & & & ab & & & + & b^2 & - & bc & & \\
 & & & & - & ac & & & - & bc & + & c^2 \\
\hline
 & a^2 & + & 2ab & - & 2ac & + & b^2 & - & 2bc & + & c^2
\end{array}
$$

Se eliminan términos semejantes (si los hay) y se ordenan de acuerdo al grado y alfabéticamente.

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

El resultado se multiplica una vez más por la base de la exponencial porque el exponente de la misma es 3.

$$
\begin{array}{rccccccccccccccccccccc}
 & a^2 & + & b^2 & + & c^2 & + & 2ab & - & 2ac & - & 2bc & & & & & & & & \\
3\ \times & a & + & b & - & c & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & a^3 & + & ab^2 & + & ac^2 & + & 2a^2b & - & 2a^2c & - & 2abc & & & & & & & & \\
 & & + & 2ab^2 & & & + & a^2b & & & - & 2abc & + & b^3 & + & bc^2 & - & 2b^2c & & \\
 & & & & + & 2ac^2 & & & - & a^2c & - & 2abc & & & + & 2bc^2 & - & b^2c & - & c^3 \\
\hline
 & a^3 & + & 3ab^2 & + & 3ac^2 & + & 3a^2b & - & 3a^2c & - & 6abc & + & b^3 & + & 3bc^2 & - & 3b^2c & - & c^3
\end{array}
$$

Finalmente se eliminan términos semejantes (si los hay) y se ordenan de acuerdo al grado y alfabéticamente.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + 3ac^2 - 3a^2c - 6abc$$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial racional.

$\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{5}\right)^2$

Operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales.

$\frac{a}{3} + \frac{b}{5} = \frac{5a + 3b}{(3)(5)} = \left(\frac{5a + 3b}{15}\right)$

Sustituir en expresión original:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2=\left(\frac{5a+3b}{15}\right)^2=\frac{(5a+3b)^2}{(15)^2}=\frac{(5a+3b)(5a+3b)}{225}=\frac{25a^2+30ab+9b^2}{225}$$

Se simplifica:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2=\left(\frac{5a+3b}{15}\right)^2=\frac{25a^2+30ab+9b^2}{225}=\frac{25a^2}{225}+\frac{30ab}{225}+\frac{9b^2}{225}=\frac{a^2}{9}+\frac{2ab}{15}+\frac{b^2}{25}$$

Radicales de polinomios[45]

Raíz cuadrada de polinomios enteros.

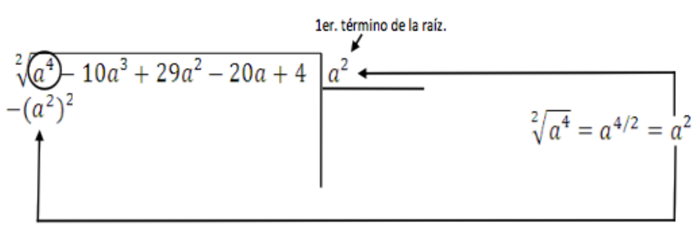
Para extraer la raíz cuadrada de una expresión algebraica entera se aplica el siguiente método que se detallará a través del ejemplo a continuación:

Evalúa la raíz cuadrada de $a^4-20a+4+29a^2-10a^3$

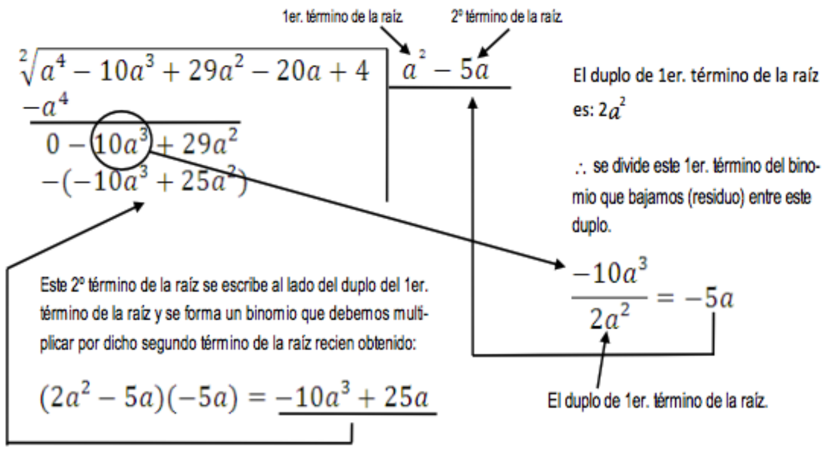
a) Se ordena el polinomio dado:

$a^4-10a^3+29a^2-20a+4$

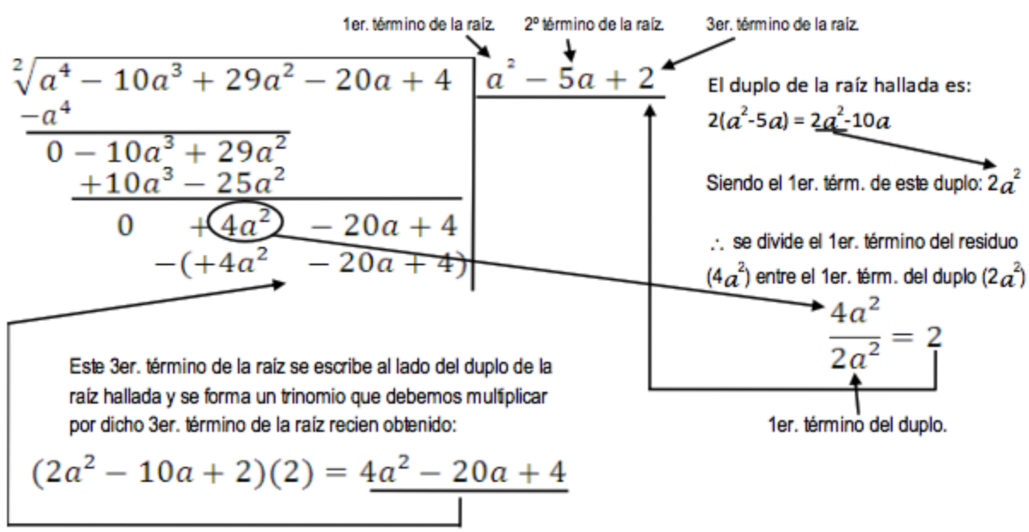
b) Se halla la raíz cuadrada del primer término del polinomio, que será el primer término de la raíz cuadrada; se eleva al cuadrado esta raíz y se resta al polinomio.



c) Se bajan los dos términos siguientes del polinomio y se divide el primero de estos por el duplo del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz. Este segundo término de la raíz con su propio signo se escribe al lado del duplo (multiplicar por 2) del primer término de la raíz y se forma un binomio; este binomio se multiplica por dicho segundo término y el producto se resta de los dos términos que habíamos bajado.



d) Se bajan los términos necesarios para tener tres términos en el residuo. Se duplica la parte de la raíz ya hallada (1er y 2º término de la raíz) y se divide el primer término del residuo entre el primero de este duplo. El cociente es el tercer término de la raíz. Este tercer término con su propio signo, se escribe al lado del duplo de la parte de la raíz hallada y se forma un trinomio; este trinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz y el producto se resta al residuo.



e) Se continua el procedimiento anterior, dividiendo siempre el primer término del residuo entre el primer término del duplo de la parte de la raíz hallada, hasta obtener residuo cero.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[2]{a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4} & a^2 - 5a + 2 \\
\underline{-a^4} & \sqrt[2]{a^4} = a^{4/2} = a^2 \\
0 - 10a^3 + 29a^2 & (2a^2 - 5a)(-5a) = -10a^3 + 25a \\
\underline{\quad +10a^3 - 25a^2} & (2a^2 - 10a + 2)(2) = 4a^2 - 20a + 4 \\
\qquad 0 \quad + 4a^2 \quad - 20a + 4 & \\
\qquad\quad \underline{-4a^2 \quad + 20a - 4} & \\
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cuadrada de la raíz es el radicando de la radicación.

$$(a^2 - 5a + 2)^2 = a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4$$

Raíz cuadrada de polinomios racionales

Prácticamente se emplea la misma metodología del caso anterior, teniendo presente de simplificar cada vez que se pueda.

Nota: La raíz cuadrada de un polinomio racional con denominadores que contengan literales, puede extraerse enviando las letras al numerador cambiándole el signo a sus exponentes.

La extracción de la raíz cuadrada de una expresión algebraica racional se comprenderá mejor a través del ejemplo a continuación:

Ejemplo: evalúa la raíz cuadrada de $\frac{b^4}{25} - \frac{a^3b}{2} + \frac{a^4}{16} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5}$

a) $\frac{a^4}{16} - \frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5} + \frac{b^4}{25}$

b)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}}\quad\Big|\ \frac{a^2}{4}$$

$$-\left[\frac{a^2}{4}\right]^2$$

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}}=\frac{\sqrt[2]{a^4}}{\sqrt{16}}=\frac{a^{4/2}}{4}=\frac{a^2}{4}$$

c)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}}\quad\Big|\ \frac{a^2}{4}-ab-\frac{b^2}{5}$$

$$-\frac{a^4}{16}$$

$$0\quad -\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}$$

$$+\frac{a^3b}{2}-a^2b^2$$

$$0\quad -\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

$$-\left[-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}\right]$$

$$+\frac{9a^2b^2}{10}-\frac{a^2b^2}{1}=\frac{9a^2b^2-10a^2b^2}{10}=-\frac{a^2b^2}{10}$$

El duplo de la raíz hallada es:

$$2\left[\frac{a^2}{4}-ab\right]=\frac{2a^2}{4}-2ab=\boxed{\frac{a^2}{2}-2ab}$$

Siendo el 1er. térm. de este duplo: $\frac{a^2}{2}$

∴ se divide el 1er. término del residuo entre el 1er. térm. del duplo:

$$\left[\frac{-\frac{a^2b^2}{10}}{\frac{a^2}{2}}\right]=-\frac{2a^2b^2}{10a^2}=\boxed{-\frac{b^2}{5}}$$

Este 3er. término de la raíz se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio que debemos multiplicar por dicho 3er. término de la raíz recien obtenido:

$$\left[\boxed{\frac{a^2}{2}-2ab}\boxed{-\frac{b^2}{5}}\right]\left[\boxed{-\frac{b^2}{5}}\right]=-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

d)

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{\dfrac{a^4}{16}-\dfrac{a^3b}{2}+\dfrac{9a^2b^2}{10}+\dfrac{2ab^3}{5}+\dfrac{b^4}{25}} & \dfrac{a^2}{4}-ab-\dfrac{b^2}{5} \\
\hline
-\dfrac{a^4}{16} & \sqrt{\dfrac{a^4}{16}}=\dfrac{\sqrt[2]{a^4}}{\sqrt{16}}=\dfrac{a^{4/2}}{4}=\dfrac{a^2}{4} \\
\hline
0\quad -\dfrac{a^3b}{2}+\dfrac{9a^2b^2}{10} & \left[\dfrac{a^2}{2}-ab\right]\left[-ab\right]=-\dfrac{a^3b}{2}+a^2b^2 \\
\qquad +\dfrac{a^3b}{2}-a^2b^2 & \\
\hline
\qquad 0\quad -\dfrac{a^2b^2}{10}+\dfrac{2ab^3}{5}+\dfrac{b^4}{25} & \left[\dfrac{a^2}{2}-2ab-\dfrac{b^2}{5}\right]\left[-\dfrac{b^2}{5}\right]= \\
\qquad\quad +\dfrac{a^2b^2}{10}-\dfrac{2ab^3}{5}-\dfrac{b^4}{25} & \qquad =-\dfrac{a^2b^2}{10}+\dfrac{2ab^3}{5}+\dfrac{b^4}{25} \\
\hline
\qquad\quad\ 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

e) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cuadrada de la raíz es el radicando de la radicación.

$$\left(\frac{a^2}{4}-ab-\frac{b^2}{5}\right)^2=\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

Raíz cúbica de polinomios enteros

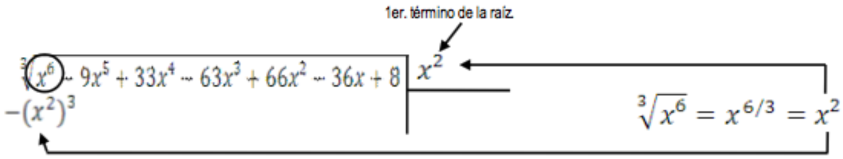
Para extraer la raíz cúbica de una expresión algebraica entera, se aplica el siguiente método que se detallará a través del ejemplo a continuación:

Hallar la raíz cúbica de $33x^4-36x+8-63x^3-9x^5+x^6+66x^2$

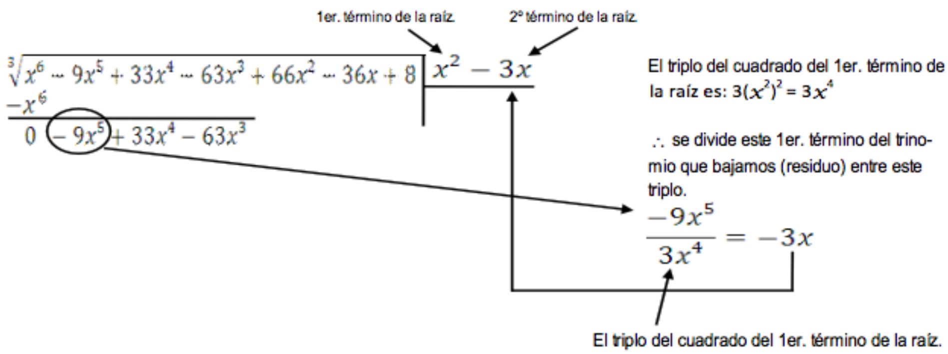
a) Se ordena el polinomio dado:

$$x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$$

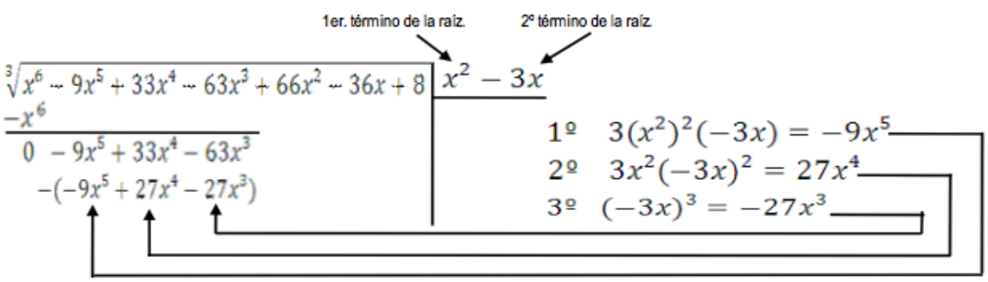
b) Se extrae la raíz cúbica de su primer término, que será el primer término de la raíz; este término se eleva al cubo y se resta del polinomio.



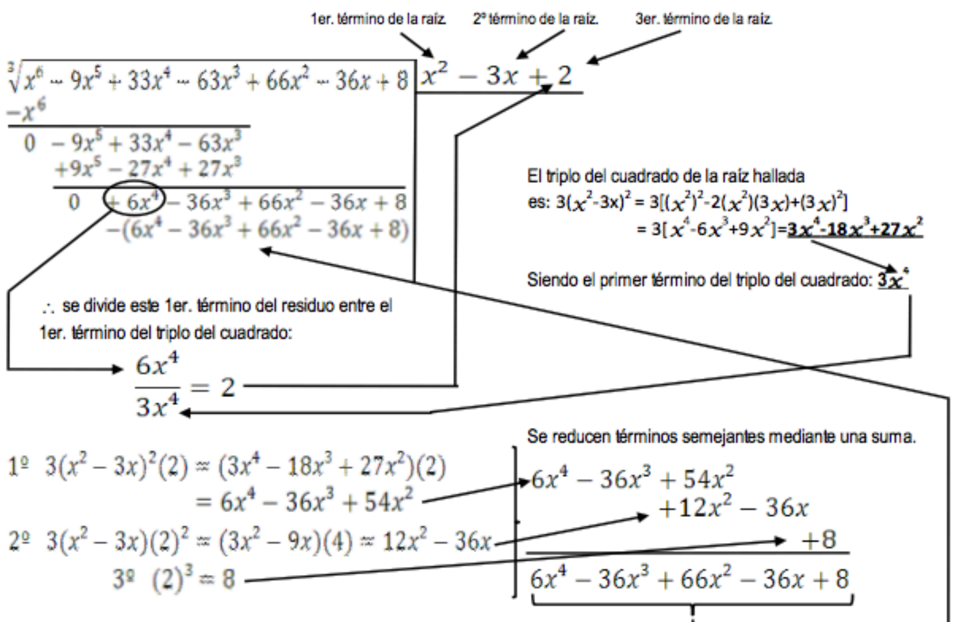
c) Se bajan los tres términos siguientes del polinomio y se divide el primero de ellos por el triplo (multiplicar por 3) del cuadrado del término ya hallado de la raíz; el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.



d) Se forman tres productos: 1º.- El triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo término de la raíz. 2º.- El triplo del primer término de la raíz por el cuadrado del segundo término de la raíz. Y 3º.- Cubo del segundo término de la raíz. Estos productos se restan (cambiándole los signos) de los tres términos del polinomio que se habían bajado (residuo).



e) Se bajan los términos que faltan del polinomio y se divide el primer término del residuo entre el primer término del triplo del cuadrado de la raíz ya hallada. El cociente de esta división, es el tercer término de la raíz. Se forman tres productos: 1º.- Triplo del cuadrado del binomio que forman el primer y segundo término de la raíz por el tercer término de la raíz. 2º.- Triplo de dicho binomio por el cuadrado del tercer término de la raíz. y 3º.- Cubo del tercer término de la raíz. Estos productos se restan (reduciendo previamente términos semejantes si los hay) del residuo de la raíz. Si la diferencia es cero, la operación ha terminado. Si aún quedan términos en el residuo, se continúa el procedimiento anterior hasta obtener residuo cero.



$\sqrt[3]{x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8}$	x^2-3x+2
$-x^6$	$\sqrt[3]{x^6}=x^{6/3}=x^2$
$0\ -9x^5+33x^4-63x^3$	1º $3(x^2)^2(-3x)=-9x^5$
$+9x^5-27x^4+27x^3$	2º $3x^2(-3x)^2=27x^4$
$0\ +6x^4-36x^3+66x^2-36x+8$	3º $(-3x)^3=-27x^3$
$-6x^4+36x^3-66x^2+36x-8$	
$0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0$	1º $3(x^2-3x)^2(2)=6x^4-36x^3+54x^2$
	2º $3(x^2-3x)(2)^2=12x^2-36x$
	3º $(2)^3=8$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cúbica de la raíz es el radicando de la radicación.

$$(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$$

Raíz cúbica de polinomios racionales

Prácticamente se emplea la misma metodología del caso anterior, teniendo presente de simplificar cada vez que se pueda.

La extracción de la raíz cúbica de una expresión algebraica racional se comprenderá mejor a través del ejemplo a continuación:

Hallar la raíz cúbica de:

$$\frac{a^3}{x^3} + \frac{153x}{4a} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$$

a)

$$\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$$

b)

1er. término de la raíz

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \;\Big|\; \frac{a}{x}$$

$$-\left[\frac{a}{x}\right]^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{a^{3/3}}{x^{3/3}} = \frac{a}{x}$$

c)

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \quad \Bigg| \quad \frac{a}{x} - 5$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0 - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz es:

$$3\left[\frac{a}{x}\right]^2 = \frac{3a^2}{x^2}$$

∴ se divide este 1er. término del trinomio que bajamos (residuo) entre este triplo.

$$\frac{-\frac{15a^2}{x^2}}{\frac{3a^2}{x^2}} = -\frac{15a^2x^2}{3a^2x^2} = -5$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz.

d)

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \quad \Bigg| \quad \frac{a}{x} - 5$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0 - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140$$

$$-\left[-\frac{15a^2}{x^2} + \frac{75a}{x} - 125\right]$$

1º $3\left[\frac{a}{x}\right]^2\left[-5\right] = -\frac{15a^2}{x^2}$

2º $3\left[\frac{a}{x}\right]\left[-5\right]^2 = \frac{75a}{x}$

3º $(-5)^3 = -125$

e)

1er. término de la raíz. 2º término de la raíz. 3er. término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}} \quad \Big| \quad \frac{a}{x}-5+\frac{x}{2a}$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140$$

$$+\frac{15a^2}{x^2}-\frac{75a}{x}+125$$

$$0\ +\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

El triplo del cuadrado de la raíz hallada es:

$$3\left[\frac{a}{x}-5\right]^2=3\left[\left(\frac{a}{x}\right)^2-2\left(\frac{a}{x}\right)(5)+(5)^2\right]$$

$$=3\left[\frac{a^2}{x^2}-\frac{10a}{x}+25\right]$$

$$=\frac{3a^2}{x^2}-\frac{30a}{x}+75$$

Siendo el primer término del triplo del cuadrado: $\frac{3a^2}{x^2}$

Resolviendo:

$$\frac{153a}{2x}-\frac{75a}{x}=\frac{153a-150a}{2x}=\frac{3a}{2x}$$

∴ se divide el 1er. término del residuo entre el 1er. término del triplo del cuadrado:

$$\frac{\frac{3a}{2x}}{\frac{3a^2}{x^2}}=\frac{3ax^2}{6a^2x}=\frac{x}{2a}$$

1º $3\left[\frac{a}{x}-5\right]^2\left[\frac{x}{2a}\right]=3\left[\frac{a^2}{x^2}-\frac{10a}{x}+25\right]\left[\frac{x}{2a}\right]$

$$=\frac{3a^2x}{2ax^2}-\frac{30ax}{2ax}+\frac{75x}{2a}=\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a}$$

2º $3\left[\frac{a}{x}-5\right]\left[\frac{x}{2a}\right]^2=\left[\frac{3a}{x}-15\right]\left[\frac{x^2}{4a^2}\right]=$

$$=\frac{3ax^2}{4a^2x}-\frac{15x^2}{4a^2}=\frac{3x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}$$

3º $\left[\frac{x}{2a}\right]^3=\frac{x^3}{8a^3}$

Se reducen términos semejantes mediante una suma.

$$\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a}$$

$$\frac{3x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}$$

$$+\frac{x^3}{8a^3}$$

$$\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

Se resta esto al residuo.

Resolviendo:

$$\frac{75x}{2a}+\frac{3x}{4a}=\frac{150x+3x}{4a}=\frac{153x}{4a}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}} & \frac{a}{x}-5+\frac{x}{2a} \\
-\frac{a^3}{x^3} & \sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{a^{3/3}}{x^{3/3}}=\frac{a}{x} \\
\hline
0-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140 & 1º\ 3\left[\frac{a}{x}\right]^2\left[-5\right]=-\frac{15a^2}{x^2} \\
+\frac{15a^2}{x^2}-\frac{75a}{x}+125 & 2º\ 3\left[\frac{a}{x}\right]\left[-5\right]^2=\frac{75a}{x} \\
 & 3º\ (-5)^3=-125 \\
\hline
0+\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3} & 1º\ 3\left[\frac{a}{x}-5\right]^2\left[\frac{x}{2a}\right]=\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a} \\
-\left[\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}\right] & 2º\ 3\left[\frac{a}{x}-5\right]\left[\frac{x}{2a}\right]^2=\frac{3x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & 3º\ \left[\frac{x}{2a}\right]^3=\frac{x^3}{8a^3}
\end{array}
$$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cúbica de la raíz es el radicando de la radicación.

$$\left(\frac{a}{x}-5+\frac{x}{2}\right)^3=\frac{a^3}{x^3}-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

2.3 Productos notables de expresiones algebraicas[46]

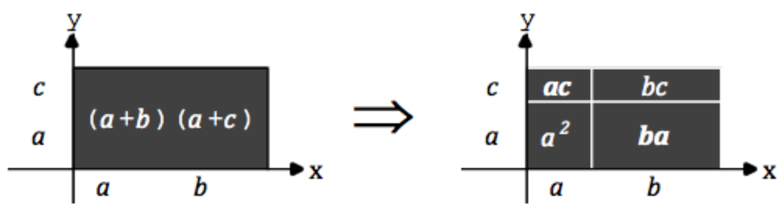
Es como se les define a las multiplicaciones con expresiones algebraicas donde el producto puede ser señalado como regla constante, sin verificar dicha multiplicación. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

Cada producto notable se relaciona a una fórmula de factorización. Por ejemplo, la factorización de una diferencia de cuadrados perfectos es un producto de dos binomios conjugados.

Binomio con término común

En un producto de dos binomios que tienen un término común, se suma el cuadrado del término común con el producto del término común por la suma de los otros términos no comunes y posteriormente se añade el producto de los términos no comunes.
Ejemplo: $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$

La siguiente figura muestra el producto de binomios con un término común:



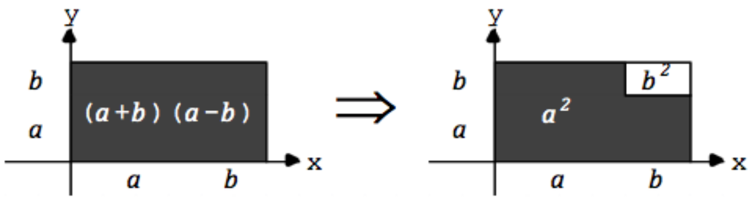
Ejemplo: desarrolla el siguiente producto:
$(4a+5)(4a-8)$

$$(4a+5)(4a-8) = (4a)^2 + 4a(5-8) + [(5)(-8)] = 16a^2 + 4a(-3) + (-40) = 16a^2 - 12a - 40$$

Binomios conjugados

Dos binomios conjugados son aquellos que solo difieren en el signo de la operación. El resultado de un producto de binomios conjugados es igual a la diferencia de cuadrados de cada término.
Ejemplo: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

La siguiente figura muestra el producto de binomios conjugados:



Desarrolla el siguiente producto:
$(4a + 6b)(4a - 6b)$

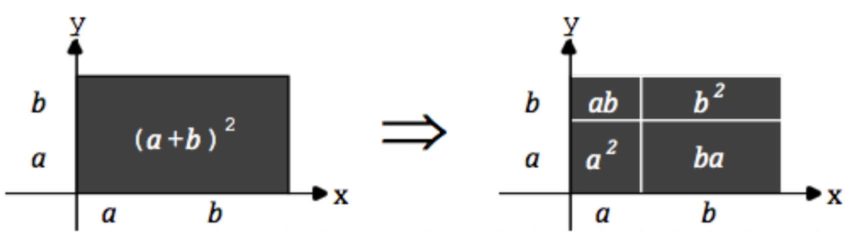
$(4a + 6b)(4a - 6b) = (4a)^2 - (6b)^2 = 16a^2 - 36b^2$

Binomio al cuadrado

Para elevar un binomio aditivo al cuadrado, es decir, multiplicarlo por sí mismo, es suficiente con elevar el primer término al cuadrado, sumar el doble producto del primer término por el segundo término y finalmente sumar el cuadrado del segundo término. Si el binomio es una diferencia se alternan los signos empezando con el primer término con signo positivo, el segundo con signo menos y el tercer término con signo positivo.

Ejemplo: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

La siguiente figura muestra un binomio al cuadrado:



Desarrollar:
$(3a + 3b)^2$

$(3a + 3b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(3b) + (3b)^2 = 9a^2 + 18ab + 9b^2$

Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado:
$(3a - 3b)^2$

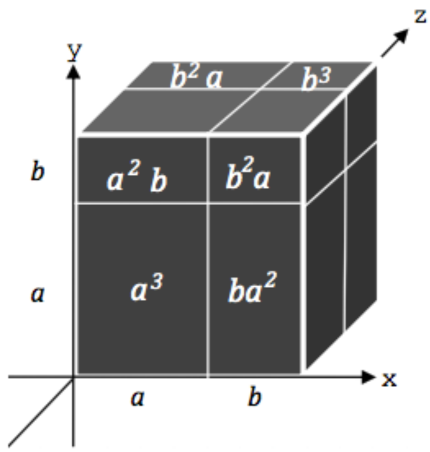
$(3a - 3b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(3b) + (3b)^2 = 9a^2 - 18ab + 9b^2$

Binomio al cubo

Para elevar un binomio aditivo al cubo, es decir, multiplicarlo por sí mismo tres veces, es suficiente con elevar el primer término al cubo, sumar el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo término, adicionarle el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término y finalmente sumarle el segundo término al cubo. Si el binomio es una diferencia se alternan los signos, empezando con el primer término con signo positivo, el segundo con signo negativo, el tercer término con signo positivo y el cuarto y último término negativo.

Ejemplo: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

La siguiente figura muestra un binomio al cubo:



Ejemplo: mediante la técnica del binomio al cubo, localiza la potencia de la siguiente exponencial al cubo:
$(a + 3b)^3$

$$(a + 3b)^3 = a^3 + 3a^2(3b) + 3a(3b)^2 + (3b)^3 = a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$$

Mediante la técnica del binomio al cubo, desarrolla la potencia de la siguiente exponencial al cubo:
$(a - 3b)^3$

$$(a - 3b)^3 = a^3 - 3a^2(3b) + 3a(3b)^2 - (3b)^3 = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$$

Binomio de Newton

El teorema del binomio[47], descubierto hacia 1664 -1665, fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677), secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Como sabemos, de los temas de factorización anteriores, podemos desarrollar fácilmente polinomios de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ o $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, sin embargo, el realizar operaciones con potencias de mayor grado resulta tedioso, a continuación presentamos algunos de ellos:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Es de la forma $(a \pm b)^n$[48] y una forma fácil de determinar sus coeficientes numéricos al desarrollarlo es mediante el triángulo de Pascal, el cual se construye de acuerdo a las instrucciones siguientes sin llegar al término general.

Primero empezar cada renglón con 1 y terminarlo en 1. Los números restantes son la suma de los dos números situados inmediatamente arriba a la izquierda y a la derecha.

Segundo, con respecto a los términos algebraicos que incluyen las literales **a** y **b**, la suma de los exponentes de **a** y de **b** en cada término es igual al exponente del binomio, es decir, cuando disminuye el exponente de **a**, aumenta el de **b**; ambos en una unidad.

$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	1 1	$a+b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
⋮	⋮	⋮
$(a\pm b)^n$	término general	$a^n \pm \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$

Donde:

1. n = entero positivo.
2. Signos:

a) En $(a+b)^n$ todos los signos son positivos.

Ejemplo: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

b) En $(a-b)^n$ se empieza con + y luego se van alternando.

Ejemplo:$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Ejemplo: evalúa la potencia del siguiente binomio aplicando el triángulo de Pascal.

$(2x^2 + 3y^2)^5$

Se hace $a = 2x^2$ y $b = 3y^2$ y se aplica la regla según triángulo de pascal.

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Se sustituyen datos y se resuelve.

$$(2x^2 + 3y^2)^5 = (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(3y^2) + 10(2x^2)^3(3y^2)^2 + 10(2x^2)^2(3y^2)^3 + 5(2x^2)(3y^2)^4 + (3y^2)^5$$

Por último, simplificar la expresión haciendo uso de las leyes de exponenciación.

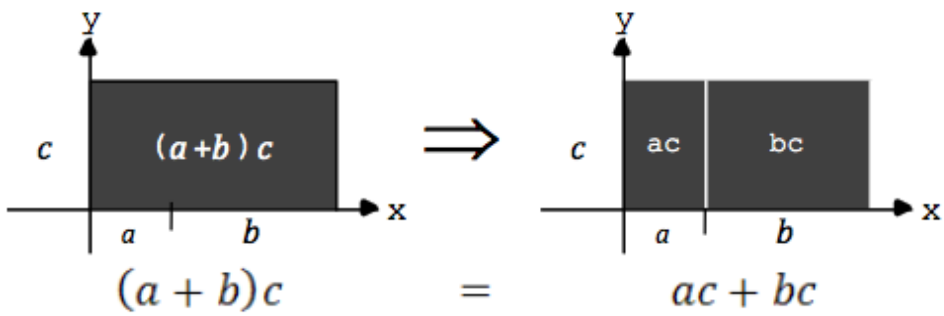
$$(2x^2 + 3y^2)^5 = 32x^{10} + 240x^8y^2 + 720x^6y^4 + 1080x^4y^6 + 810x^2y^8 + 243y^{10}$$

2.4 Factorización[49]

Como ya se analizó en los números racionales existen otros números que se expresan como el producto de otros a los que les llamamos factores que, al multiplicarlos todos, resulta el número original[50]. En el caso particular de los números, los factores son números primos, en álgebra, la factorización es expresar un polinomio como producto de otros polinomios a los que les denominaremos factores al igual que con los números.

Factor común
El factor común es la literal común de un binomio, trinomio o polinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes.

La figura que representa la regla del factor común es la siguiente:



Reglas para extraer el o los factores comunes de expresiones algebraicas

a) Factor común monomio: se extrae por agrupación de términos.

Extraer de la siguiente expresión el factor común.

$ab + ac + ad$

$ab + ac + ad = a(b + c + d)$

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes.

$ax + bx + ay + by$

$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

b) Factor común polinomio: primero hay que determinar el factor común de los coeficientes junto con el de las variables de menor exponente. Aquí el factor común no cuenta con un término, sino con dos.

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes:

$6a^2(a - b) + 4a(a - b) + 2(a - b)$

$6a^2(a - b) + 4a(a - b) + 2(a - b) = (a - b)(6a^2 + 4a + 2)$

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes:

$8a^3(4a + b) + 4a + b$

$8a^3(4a+b)+4a+b=8a^3(4a+b)+1(4a+b)=(4a+b)(8a^3+1)$

Diferencia de cuadrados

Son binomios cuyos términos están al cuadrado y los signos de cada uno son diferentes. Los términos se caracterizan por tener raíz cuadrada exacta.

La factorización de la diferencia de cuadrados consiste en obtener la raíz cuadrada de cada término y representar estas como el producto de binomios conjugados tal y como se estudió en el tema: Binomios conjugados de este apartado, a continuación, se muestra tal expresión:

$a^2-b^2=\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\right)\left(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}\right)=(a+b)(a-b)$

Ejemplo: resuelve la siguiente diferencia de cuadrados.

$(ax)^2-(by)^2$

$(ax)^2-(by)^2=(ax+by)(ax-by)$

Resuelve la siguiente diferencia de cuadrados.

$16a^2-25b^2$

$16\mathrm{a}^2-25\mathrm{b}^2=(4\mathrm{a})^2-(5\mathrm{b})^2=(4\mathrm{a}+5\mathrm{b})(4\mathrm{a}-5\mathrm{b})$

Trinomio cuadrado perfecto

Son aquellas expresiones algebraicas de tres términos, de los cuales dos tienen raíces cuadradas exactas, y el resto equivale al doble producto de las raíces cuadradas del primero por el segundo. De hecho, es la operación inversa al desarrollo de un binomio al cuadrado.

Para factorizar se ordenan los términos dejando de primero y de tercero los términos cuadráticos, luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis elevado al cuadrado, separándolos por el signo que acompaña al segundo término. Por último, se verifica que el doble producto del primero por el segundo término sea 2ab, con lo que se confirma que es correcta la solución. De ser diferente esta solución no es la correcta. La expresión algebraica que manifiesta esta regla es:
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Ejemplo: factoriza el siguiente trinomio cuadrado:
$25m^2 - 40mn + 16n^2$

$$25m^2 - 40mn + 16n^2 = \left(\sqrt{25m^2} - \sqrt{16n^2}\right)^2 = (5m - 4n)^2$$

Verificando
$2ab = 2(5m)(4n) = 40mn$ la factorización es correcta.

Factoriza el siguiente trinomio cuadrado:
$4m^2 + 12mn + 9n^2$

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 = \left(\sqrt{4m^2} + \sqrt{9n^2}\right)^2 = (2m + 3n)^2$$

Verificando
$2ab = 2(2m)(3n) = 12mn$ la factorización es correcta.

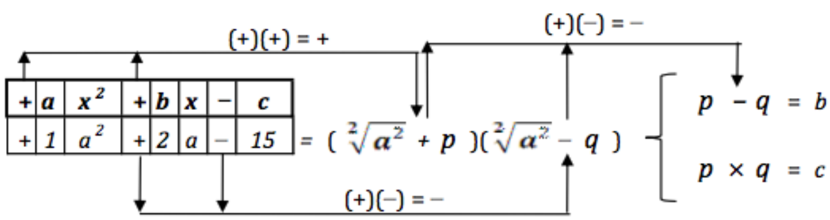
Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$

Son aquellas expresiones algebraicas de tres términos, donde hay una variable[51] cuadrática, una lineal y un término independiente. Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable cuadrática, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados (pudiendo ser números negativos) den como resultado el término del medio. Cuando el coeficiente numérico de la variable cuadrática sea diferente de uno, es decir, $a \neq 1$, multiplicar el trinomio por a:

$$a(ax^2 \pm bx \pm c) = a^2x^2 \pm a(bx) \pm (ac) = (ax)^2 \pm b(ax) \pm (ac)$$

En esta expresión resultante hay que precisar la siguiente observación: Después de multiplicar por a, el término central se deja expresado así $\underline{b(ax)}$ y cuando se obtengan los dos paréntesis resultantes de la factorización dividir ambos entre a. Si a no divide a ningún coeficiente numérico de los términos da la factorización, se descompone en sus factores y se vuelve a intentar una vez más la división.

Factoriza el siguiente trinomio:
$a^2 + 2a - 15$



$$\begin{matrix} b = 2 \\ c = 15 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} p - q = 2 \\ p \times q = 15 \end{matrix} \right.$$

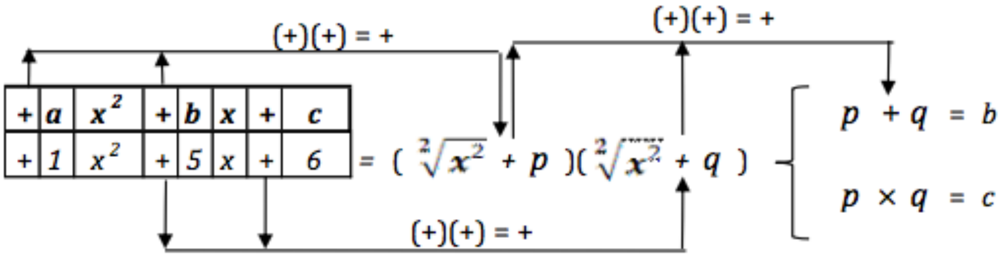
Debo buscar dos números cuya diferencia me dé 2 y cuyo producto me dé 15:

$$\left.\begin{matrix} p & & q & & \\ 5 & - & 3 & = & 2 \\ 5 & \times & 3 & = & 15 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} p = 5 \\ q = 3 \end{matrix}\right\} \text{ y sustituyo:}$$

$$a^2 + 2a - 15 = (\sqrt{a^2} + p)(\sqrt{a^2} - q) = (a + 5)(a - 3)$$

Factoriza el siguiente trinomio:

$x^2 + 5x + 6$



$$\left.\begin{array}{l} b = 5 \\ c = 6 \end{array}\right\} \begin{cases} p + q = 5 \\ p \times q = 6 \end{cases}$$

Debo buscar dos números cuya suma me dé 5 y cuyo producto me dé 6:

$$\left.\begin{array}{ccccc} p & & q & & \\ 3 & + & 2 & = & 5 \\ 3 & \times & 2 & = & 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} p = 3 \\ q = 2 \end{array}\right\} \quad \text{y sustutuyo:}$$

$$x^2 + 5x + 6 = (\sqrt{x^2} + p)(\sqrt{x^2} + q) = (x+3)(x+2)$$

Factoriza el siguiente trinomio:

$6m^2 - 7m - 3$

En esta expresión $6 \neq 1$, por lo que se debe multiplicar toda la expresión por el coeficiente del término cuadrático que es 6.

$$6(6m^2 - 7m - 3) = 6^2m^2 - 6(7m) - 6(3) = (6m)^2 - \mathbf{7(6}\boldsymbol{m}\mathbf{)} - 18$$

$(+)(-) = -$ $\qquad$ $(-)\ (+) = -$

+	a	x^2	−	b	x	−	c
+	1	$(6m)^2$	−	7	$(6m)$	−	18

$$= \left(\sqrt{m^2} - p\right)\left(\sqrt{m^2} + q\right) \quad \begin{cases} p - q = b \\ p \times q = c \end{cases}$$

$(-)\ (-) = +$

$$\begin{matrix} b = 7 \\ c = 18 \end{matrix} \begin{cases} p - q = 7 \\ p \times q = 18 \end{cases}$$

Debo buscar dos números cuya resta me dé 7 y cuyo producto dé 18:

$$\begin{matrix} p & & q & & \\ 9 & - & 2 & = & 7 \\ 9 & \times & 2 & = & 18 \end{matrix} \left.\right\} \quad \begin{matrix} p = 9 \\ q = 2 \end{matrix} \left.\right\} \qquad \text{y sustutuyo:}$$

$$6(6m^2 - 7m - 3) = 6^2m^2 - 6(7m) - 6(3) = (6m)^2 - 6(7m) - 18 = \left(\sqrt{(6m)^2} - 9\right)\left(\sqrt{(6m)^2} + 2\right)$$

$$6(6m^2 - 7m - 3) = (6m - 9)(6m + 2)$$

Como al inicio se multiplicó por 6, ahora debemos dividir también entre 6 para no afectar la expresión algebraica en su totalidad.

$$\frac{6(6m^2 - 7m - 3)}{6} = \frac{(6m - 9)(6m + 2)}{6}$$

Se observa que algunos términos del producto de los binomios resultantes de la factorización no son divisibles por 6, así que descomponemos 6 en sus factores, esto es, 6=3x2.

$$6m^2 - 7m - 3 = \frac{(6m - 9)(6m + 2)}{3 \times 2} = \left(\frac{6m}{3} - \frac{9}{3}\right)\left(\frac{6m}{2} + \frac{2}{2}\right) = (2m - 3)(3m + 1)$$

Factorización por agrupación

Para factorizar por agrupación de términos un polinomio, debe considerase los términos comunes y posteriormente los compuestos resultado de la primera agrupación donde se aplica el caso del factor común. La expresión algebraica que representa este tipo de factorización es la siguiente:

$$ab + ac + bd + dc = (ab + ac) + (bd + dc) = a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$$

Ejemplo: factoriza la siguiente expresión algebraica.
$2l + 2m + 3ln + 3mn$

$$2l + 2m + 3ln + 3mn = (2l + 3ln) + (2m + 3mn) = l(2 + 3n) + m(2 + 3n)$$
$$= (2 + 3n)(l + m)$$

Polinomio cubo perfecto

Son aquellas expresiones algebraicas de 4 términos, de los cuales dos tienen raíces cúbicas exactas, y el resto equivale al triple producto del primer término al cuadrado por el segundo término y al triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término. De hecho, es la operación inversa de un binomio al cubo. La expresión algebraica que representa esta regla es:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Para factorizar[52] se siguen los siguientes pasos:

1. Debe tener cuatro términos y estar ordenado con respecto a una letra.
2. Dos de sus términos, el 1º (a^3) y el 4º (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.
3. El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término $3a^2b$.

4. El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto termino $3ab^2$.
5. El segundo y el cuarto término deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).
6. Si todos los términos son positivos el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, si hay términos negativos el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^3$.

Ejemplo: factorizar la siguiente expresión algebraica

$125 + 15x^2 + x^3 + 75x$

Paso 1:

$x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

Paso 2:

$\sqrt[3]{x^3} + 15x^2 + 75x + \sqrt[3]{125}$

$\sqrt[3]{x^3} = x; \sqrt[3]{125} = 5$ donde $\boldsymbol{a = x}$; $\boldsymbol{b = 5}$

Paso 3:

$15x^2 = \boldsymbol{3a^2b} = 3(x)^2(5) = (3 \times 5)x^2 = 15x^2$

Paso 4:

$75x = \boldsymbol{3ab^2} = 3(x)(5)^2 = (3 \times 25)x = 75x$

Paso 5:

Del paso 1 se observa que el segundo y el cuarto término tienen el mismo signo y es positivo, al igual que el primer y tercer término.

Paso 6:

Como todos los términos son positivos, el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, por tanto:

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = (a + b)^3 = (x + 5)^3$$

Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$27x^3 - 8yb^6 - 54x^2y^2 + 36xy^4$$

Paso 1: $27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6$

Paso 2:

$$\sqrt[3]{\mathbf{27x^3}} - 54x^2y^2 + 36xy^4 - \sqrt[3]{\mathbf{8y^6}}$$

$\sqrt[3]{27x^3} = 3x; \sqrt[3]{8y^6} = 2y^2$ donde $a = 3x \quad ; \quad b = 2y^2$

Paso 3:

$$54x^2y^2 = 3a^2b = 3(3x)^2(2y^2) = 3(9x^2)(2y^2) = (3 \times 9 \times 2)x^2y^2 = 54x^2y^2$$

Paso 4:

$$36xy^4 = 3ab^2 = 3(3x)(2y^2)^2 = 3(3x)(4y^4) = (3 \times 3 \times 4)xy^4 = 36xy^4$$

Paso 5:

Del paso 1 se observa que el segundo y el cuarto termino tienen el mismo signo y es negativo.

Paso 6:

Como hay términos negativos, el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a–b)^3$, por lo tanto:

$$27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6 = (a - b)^3 = (3x - 2y^2)^3$$

Binomio de la forma $a^3 \pm b^3$[53]

Abordaremos estas expresiones algebraicas de acuerdo a lo siguiente:

Sean las expresiones $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$

$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$ y $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$

Así el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, como a continuación se muestra:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + a^2)$ y $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + a^2)$

De donde se deducen las siguientes reglas:

1. La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.
2. La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

Ejemplo: factorizar la siguiente diferencia de cubos:

$27x^3 - 8y^6$

Como se aprecia, es una diferencia de cubos y se aplica la regla 2,

a) Se extraen las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos

$a = \sqrt[3]{27x^3} = 3x$. y. $b = \sqrt[3]{8y^6} = 2y^2$

b) Se sustituyen datos en la regla principal:

$$27x^3 - 8y^6 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (3x-2y^2)\left[(3x)^2 + (3x)(2y^2) + (2y^2)^2\right]$$

c) Se reducen términos.

$$27x^3 - 8y^6 = (3x-2y^2)(9x^2+6xy^2+4y^4)$$

Factorizar la siguiente suma de cubos:

$64x^3 + 125y^6$

Como se aprecia, es una suma de cubos y se aplica la regla 1,

a) Se extraen las raíces cubicas de los términos de la diferencia de cubos.

$a = \sqrt[3]{64x^3} = 4x$ y $b = \sqrt[3]{125y^6} = 5y^2$

b) Se sustituyen datos en la regla principal.

$$64x^3 + 125y^6 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (4x+5y^2)\left[(4x)^2 - (4x)(5y^2) + (5y^2)^2\right]$$

c) Se reducen términos,

$$64x^3 + 8y^6 = (4x+5y^2)(16x^2-20xy^2+25y^4)$$

2.5 Expresiones algebraicas racionales[54]

En una expresión algebraica racional donde el denominador implica radicales, al proceso por el cual se determina otra expresión algebraica que no involucra radicales en el denominador y que es equivalente a la expresión algebraica dada; se le llama racionalización del denominador de dicha expresión. Este proceso facilita el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Consecuentemente, racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional. Para esto se multiplican los dos términos por una expresión que convierta al denominador en potencia perfecta del índice de la raíz.

En este proceso se distinguen tres casos, que serán materia de estudio de los tres siguientes temas.

Caso I

Racionalización del tipo: $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \times \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2a^2}{5\sqrt{a}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$

$$\frac{2a^2}{5\sqrt{a}} = \frac{2a^2 \times \sqrt{a}}{5\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{2a^2\sqrt{a}}{5(\sqrt{a})^2} = \frac{2a^2\sqrt{a}}{5a} = \frac{2a\sqrt{a}}{5}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{a^2 - 4}{\sqrt{a - 2}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a-2}$

$$\frac{a^2-4}{\sqrt{a-2}} = \frac{(a^2-2^2)\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}\times\sqrt{a-2}} = \frac{(a+2)(a-2)\sqrt{a-2}}{(\sqrt{a-2})^2} = \frac{(a+2)(a-2)\sqrt{a-2}}{(a-2)} = (a+2)$$

$$\sqrt{a-2}$$

Caso II

Racionalización del tipo: $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2a^2}{5\sqrt[7]{a^3}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[7]{a^{7-3}} = \sqrt[7]{a^4}$

$$\frac{2a^2}{5\sqrt[7]{a^3}} = \frac{2a^2\times\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^3}\times\sqrt[7]{a^4}} = \frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^3\times a^4}} = \frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^7}} = \frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5a} = \frac{2a\sqrt[7]{a^4}}{5}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[5]{(3a-1)^{5-2}} = \sqrt[5]{(3a-1)^3}$

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}}=\frac{(3a-1)\times\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}\times\sqrt[5]{(3a-1)^3}}=\frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2\times(3a-1)^3}}$$
$$=\frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^5}}=$$

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}}=\frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2(3a-1)}=\frac{\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2}$$

Caso III

Racionalización del tipo: $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado[55] del denominador, para abordar este tipo en particular de racionalización de expresiones algebraicas; se debe tener presente que el producto de dos binomios conjugados corresponde a una diferencia de cuadrados (tal como ya se mencionó) presentan dos casos:

a) Cuando el denominador es un binomio cuyos términos es la suma de dos radicales $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador$\sqrt{b}-\sqrt{c}$ y se resuelve de acuerdo a lo siguiente:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica.

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$$

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a+1}\right)^2}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}{a-(a+1)}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}{a-a-1}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)}{-1}=-3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)$$

b) Cuando el denominador es un binomio aditivo y uno de los términos carece de radical $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $b-\sqrt{c}$ y se resuelve de acuerdo a lo siguiente:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{\left(b+\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{c}\right)}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{(b)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{9a-4b^2}{2b+3\sqrt{a}}$$

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $2b-3\sqrt{a}$.

$$\frac{9a-4b^2}{2b+3\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(9a-4b^2)(2b-3\sqrt{a})}{(2b+3\sqrt{a})(2b-3\sqrt{a})}=\frac{(9a-4b^2)(2b-3\sqrt{a})}{(2b)^2-\left(3\sqrt{a}\right)^2}=\frac{(9a-4b^2)(2b-3\sqrt{a})}{4b^2-9a}$$

$$=$$

$$\frac{9a-4b^2}{2b+3\sqrt{a}}=\frac{(9a-4b^2)(2b-3\sqrt{a})}{-(9a-4b^2)}=-\left(2b-3\sqrt{a}\right)$$

Este proceso de racionalización es también extensivo al campo de los números reales.

2.6 Problemario

1. Traducir a lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

1.1. El doble de un número

1.2. La tercera parte del cuádruple de un número

1.3. El producto de la suma por la diferencia de dos números

1.4. La suma de tres números consecutivos

2. Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje ordinario las siguientes expresiones algebraicas:

2.1. $\frac{x-y}{2}$

2.2. $3(x+y)$

2.3. $2x^2$

2.4. x-5

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores dados a continuación: a=1, b=2, c=3, d=4

3.1. $\frac{abc}{d}$

3.2. c(a+b)

3.3. $\frac{2\sqrt{d}+c}{a}$

3.4. $\frac{3(a+b)^2+2d}{5a}$

4. Sumar $5x^3+8x^2-3x+4$ con $-3x^3-6x^2+3x+6$

5. Restar $5x^3+8x^2-3x+4$ de $-3x^3-6x^2+3x+6$

6. Multiplicar:

6.1. $5x^2y^4$ por $-4x^3y^2z^3$

6.2. $\frac{3}{4}abc$ por $\frac{4}{2}a^2b^mc$

6.3. $x+4$ por $x+5$

6.4. x^2+6x+3 por $x-2$

7. Resolver las siguientes divisiones

7.1. $\frac{20x^2y^3}{-4xy^2}$

7.2. $\frac{60x^2y+30x^3y^2-20x^5y^4}{10x^2y}$

7.3. x^2+5x+6 entre $x+1$

7.4. x^3-3x+5 entre $x+2$

8. Por división sintética dividir $2x^4+2x^3+x^2+x$ entre x+1

9. Resolver las siguientes operaciones:

9.1. $\frac{3}{a+b}+\frac{2}{a^2-b^2}-\frac{5}{a-b}$

9.2. $\frac{100-y^2}{x^2+5x+6}\times\frac{x+3}{100+y}\times\frac{x+2}{100-y}$

9.3. $\frac{x^2+6x+8}{x^2+8x+16}\div\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-8}$

10. Desarrolla los siguientes productos notables:

10.1. (5+x)(5-x)

10.2. (3x+2)(3x+2)

10.3. $(2x-y)^3$

10.4. $(x+y)^5$

11. Factorizar:

11.1. $36x^2y^3+20x^3y^4-40x^2y^2$

11.2. 5x(a+b)-4y(a+b)

11.3. $\left(\frac{36}{x^2} - \frac{49}{y^2}\right)$

11.4. $4x^2-100$

11.5. $25x^2 + 20xy + 4y^2$

11.6. $m^2 + 2mn + n^2$

11.7. $x^2 + 11x + 30$

11.8. $x^2 + x - 12$

11.9. $x^2 - 8x + 16$

11.10. $4x^2 + 8x + 3$

11.11. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

12. Racionaliza las siguientes expresiones:

12.1. $\frac{3a}{\sqrt{3}}$

12.2. $\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$

12.3. $\frac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

2.7 Soluciones del problemario

1.1. 2x

1.2. $\frac{4x}{3}$

1.3. (a+b)(a-b)

1.4. x+(x+1)+(x+2)

2.1. La mitad de la diferencia de dos números

2.2. El triple de la suma de dos números

2.3. El doble del cuadrado de un número

2.4. Un número disminuido en 5

3.1. $\frac{3}{2}$

3.2. 9

3.3. 7

3.4. 7

4. $2x^3 + 2x^2 + 10$

5. $-8x^3 - 14x^2 + 6x + 2$

6.1. $-20x^5y^6z^3$

6.2. $\frac{3}{2}a^3b^{m+1}c^2$

6.3. $x^2 + 9x + 20$

6.4. $x^3 + 4x^2 - 9x - 6$

7.1. $-5xy$

7.2. $6 + 3xy - 2x^3y^3$

7.3. Cociente: x+4, residuo:2

7.4. Cociente: $x^2 - 2x + 1$, residuo 3

8. $2x^3+x$

9.1. $\frac{-2a-8b+2}{a^2-b^2}$

9.2. 1

9.3. $\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-20}$

10.1. $25 - x^2$

10.2. $9x^2 + 12x + 4$

10.3. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

10.4. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

11.1. $4x^2y^2(9y + 5xy^2 - 10)$

11.2. $(a+b)(5x-4y)$

11.3. $\left(\frac{6}{x}+\frac{7}{y}\right)\left(\frac{6}{x}-\frac{7}{y}\right)$

11.4. $(2x+10)(2x-10)$

11.5. $(5x+2y)^2$

11.6. $(m+n)^2$

11.7. $(x+5)(x+6)$

11.8. $(x-3)(x+4)$

11.9. $(x-4)^2$

11.10. $(2x+1)(2x+3)$

11.11. $(x+3)^3$

12.1. $\sqrt{3}a$

12.2. $\sqrt{x-2}$

12.3. $\frac{5(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

2.8 Conclusiones[56]

En este apartado de álgebra vimos la notación científica, misma que aplican profesionistas como los astrónomos, biólogos, físicos, químicos, matemáticos y otros pues, su empleo se relaciona con unidades macroscópicas y microscópicas, de las cuales aprendiste sus múltiplos y submúltiplos.

En una conferencia impartida en 1959 por uno de los grandes físicos del siglo pasado, el maravilloso teórico y divulgador Richard Feynman, predijo que había un montón de espacio al fondo (el título original de la conferencia fue*: There'splenty of room at thebottom*) y auguraba una gran cantidad de nuevos descubrimientos si se pudieran fabricar materiales de dimensiones atómicas o moleculares. Hubo que esperar varios años para que el avance en las técnicas experimentales, culminado en los años 80 con la aparición de la Microscopía Túnel de Barrido (STM) o de Fuerza Atómica (AFM), hiciera posible primero observar los materiales a escala atómica y, después, manipular átomos individuales. Con respecto a que es la Nanotecnología, empecemos por aclarar el significado del prefijo nano: este hace referencia a la milmillonésima parte de un metro (o de cualquier otra unidad de medida). Para hacernos una idea de a qué escala nos referimos, piensa que un átomo es la quinta parte de esa medida, es decir, cinco átomos puestos en línea suman un nanómetro. Bien, pues todos los materiales, dispositivos, instrumental, etc., que entren en esa escala, desde 5 a 50 o 100 átomos, es lo que llamamos Nanotecnología. Como podrás darte cuenta en todo esto se aplica el álgebra. Es de suma importancia que lo aprendido en este tema lo relaciones y lo pongas a funcionar con los efectos cotidianos, y es en el siguiente apartado donde se te proporcionará una serie de herramientas para tal efecto.

Unidad 3. Representación de soluciones y ecuaciones lineales

3. Introducción

Una parte importante dentro de los desarrollos matemáticos son las expresiones algebraicas, sus representaciones y sus ecuaciones.

¿Recuerdas cómo te has acercado a las matemáticas a lo largo de tu educación? Seguramente puedes recordar que tu primer contacto con las matemáticas fue mediante los números, seguido por el álgebra y la geometría.

Las representaciones gráficas de las ecuaciones en el plano se realizan desde tiempos remotos por parte de culturas precursoras de las ciencias como la griega, alrededor del siglo V Antes de Cristo hace aproximadamente 2500 años. Sin embargo, la representación de las figuras geométricas y más específicamente de los trazos (como lo son las rectas, parábolas y circunferencias) se han vinculado a desarrollos y comportamientos "generalizados" mediante las funciones algebraicas y el eje coordenado hasta hace apenas 400 años gracias a las aportaciones de René Descartes (1596-1650).

A partir del uso del plano cartesiano para representar y vincular los trazos de figuras planas con símbolos algebraicos, se han encontrado usos incontables de las representaciones algebraicas. En más de una ocasión seguramente has utilizado alguno de estos trazos mediante sus ecuaciones, su manejo numérico y su escritura mediante el uso del álgebra; pero ¿Qué significan estos símbolos en una situación real? o caso contrario, ¿Cómo representar una situación real con esos símbolos o trazos?

En el presente apartado se abordan ecuaciones, pero sobre todo se enfatiza en su aplicación en situaciones reales y además se representan siempre en lo posible a las funciones en más de una forma: gráfica, numérica, simbólica y verbal.

3.1 Identificación de funciones

Parece que uno de los primeros acercamientos que tenemos con las matemáticas es hasta cierto punto intuitivo, es decir: sumamos y restamos solo aplicando ciertos pasos, cuando en realidad estas dos operaciones tienen una serie de reglas que por ejemplo no permiten que en la resta se pueda intercambiar minuendo y sustraendo de una manera arbitraria, por ejemplo, el resultado de restar 3 al número 4 no tendrá el mismo resultado al hacerlo de forma inversa, es decir, restar 4 a 3. Dicho lo anterior, debemos establecer un primer concepto que nos ayude a comprender y acercarnos a los conceptos de igualdad, función y ecuación.

Una igualdad es una relación de equivalencia, puede ser numérica o algebraica, una serie de valores que son lo mismo en valor numérico, tanto del lado izquierdo como del derecho del signo igual, llamados primer miembro y segundo miembro respectivamente.

Hay igualdades simbólicas o algebraicas que de la misma manera relacionan valores de uno y otro miembro, solo que aquí los valores no son directos o no son visiblemente directos. En este punto, podemos comenzar a definir función y ecuación de la misma manera, como igualdades.

Una ecuación es una igualdad que puede tener una o más literales llamadas variables o incógnitas, que la satisfacen uno o varios valores.

Una función por otro lado, tiene una característica especial: debe tener un valor único de su variable dependiente con respecto a la independiente, esto es, para cada valor de x debe de tener y corresponder un único valor de y. Estos elementos para cada expresión se retomarán a detalle más adelante en este capítulo y en cursos posteriores donde los tratamientos de funciones no solo son útiles, sino ampliamente utilizados.

Así, esta serie de definiciones puede ser clara y lógica para algunos de nosotros, pero ilógica y hasta innecesaria para algunos otros. La idea es que comencemos a dejar una base de lo que abordaremos más adelante y que seguiremos afinando con definiciones relacionadas primeramente a las igualdades y acto seguido aplicadas a las soluciones, representaciones e interpretaciones de funciones algebraicas.

Propiedades y postulados de la igualdad

Una igualdad matemática es una relación de simetría que existe entre dos expresiones, esta relación se expresa mediante el conocido símbolo de igual (=). Parece que este concepto es sencillo, pero ¿creerás que sigue siendo sencillo si lo definimos para el campo de los números Reales ($\mathbb{R}$)? Lo que acabamos de mencionar no es más que definir para qué números la igualdad existe; simplemente para todos (positivos, negativos, racionales, decimales, enteros) exceptuando los números *imaginarios* cuyo estudio no es motivo del presente capítulo.

Así que, si bien ya definimos que la igualdad es una relación válida para cualquier número real, entonces es posible generalizar que la igualdad es también una relación entre símbolos que representen una cantidad cualquiera; en otras palabras, una igualdad será también válida tanto en el campo de los números reales como en el álgebra.

Algunas de las manipulaciones que realizaremos con símbolos algebraicos tanto en igualdades como en funciones y ecuaciones, obedecen a ciertas reglas, mismas que seguramente ya hemos utilizado en más de una ocasión, pero que recordaremos de manera formal, para que en un futuro no haya lugar a dudar en afirmar que la igualdad se cumple o que una ecuación tiene cierta raíz, comencemos entonces con:

Propiedades de la igualdad

Partiendo del concepto de álgebra como una parte de las matemáticas que se dedica a estudiar las propiedades de objetos Matemáticos (definiendo por objeto matemático a un número, una ecuación, un punto coordenado en el plano cartesiano), entonces la igualdad será en adelante una relación entre estos objetos, que para fines prácticos relacionaremos con número reales. Más adelante utilizaremos estas propiedades entre otras para resolver ecuaciones.

Reflexiva: un número siempre es igual a sí mismo, lo que en símbolos o lenguaje algebraico sería: $x = x$. **Ejemplo:** $12 = 12$

Simétrica: si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero:

si $x = y$, entonces, $y = x$. **Ejemplo:** si $x = 2$, entonces, $2 = x$.

Transitiva: si un primer número es igual a otro segundo número, y además, el segundo número es igual a otro tercer número, entonces el tercer número y el primer número son iguales. **Ejemplo:** si $x = 2$, y $2 = w$, entonces, $x = w$.

Sustitución: si $x = y$, entonces x puede ser reemplazada por y en cualquier ecuación o expresión. Ejemplo: si $x = 3$, y $x + 5 = z$, entonces $3+5= z$, y $8= z$.

Aditiva: al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida. Si $x = y$, entonces, $x + z = y + z$. **Ejemplo:** si $x = 5$, entonces, $x + 3 = 5 + 3$.

Multiplicativa: si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida. Si $a = b$ entonces $ac = bc$. **Ejemplo:** si $x = 5$, entonces, $7x = (7)(5)$.

Podemos decir que hasta este momento las propiedades básicas enunciadas pueden darnos elementos suficientes para poder solucionar ecuaciones, sin embargo, conviene mencionar algunas propiedades complementarias a las mencionadas anteriormente, así para:

La resta: nos dice que al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos otra igualdad válida. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$. **Ejemplo:** si $x = 5$, entonces, $x - 3 = 5 - 3$.

La división: nos dice que si dividimos ambos lados de la igualdad por un número real $c \neq 0$, obtenemos otra nueva igualdad válida. Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. **Ejemplo:** si $x = 5$ entonces $\frac{x}{8} = \frac{5}{8}$

La potencia: indica que si elevamos a la misma potencia ambos miembros de una igualdad esta se sigue cumpliendo. Si $a = b$, entonces, $(a)^n = (b)^n$. **Ejemplo:** si x =5 entonces $x^2 = (5)^2$

La raíz: nos dice que si calculamos la raíz n-ésima en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), la igualdad sigue siendo válida. Si $a = b$, entonces, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ (hay restricción para raíces de números negativos cuando n es par). **Ejemplo:** Si $x = 5$, entonces $\sqrt{x} = \sqrt{5}$

Para practicar: realiza un cuadro comparativo en el cual se resuman las propiedades y escribe un ejemplo de cada una de las propiedades descritas, compara tus resultados con los de tus compañeros.

Postulados de campo

Aunado a las propiedades de los números reales que hemos descrito en los párrafos anteriores, definiremos ahora una serie de nuevas propiedades llamadas *postulados*. Un postulado puede definirse como una verdad evidente que es utilizada como parte de la argumentación al hacer demostraciones. Dado que se admiten sin demostración, simplemente han de aplicarse y nos pueden ayudar a resolver ecuaciones, si definimos aquellos que se pueden aplicar al sistema de números reales y estas verdades siempre se cumplen, entonces serán llamadas postulados de campo de los números reales.

Recordemos que igual que en las propiedades de la igualdad, lo que aquí definiremos aplica a la generalidad de los números y por consecuencia a los términos algebraicos, dicho lo anterior, definamos pues los siguientes postulados.

Postulados de campo de los números reales

La manera en la cual describiremos los postulados de *campo* para los números reales será en esta ocasión en forma de una tabla[57] que se describe a continuación, en donde se menciona en la primera columna el postulado, en la segunda columna su descripción, una tercer columna con el enunciado del postulado y una cuarta con un ejemplo. Recordemos que la literal $\mathbb{R}$ denota el campo de los números reales los que pueden ser representados mediante letras.

Axioma	**Suma**	**Multiplicación**	**Ejemplo**
Cerradura	$a+b\in\mathbb{R}$	$a\otimes b\in\mathbb{R}$	$2+9=11\in\mathbb{R}$ $2\otimes(-9)=-18\in\mathbb{R}$
Conmutativo	$a+b=b+a$	$a\otimes b=b\otimes a$	$5+8=8+5$ $9\otimes 7=7\otimes 9$
Asociativo	$a+(b+c)=c+(a+b)$	$a(b\otimes c)=(a\otimes b)c$	$\sqrt{7}+(5+9)=(\sqrt{7}+5)+9$ $5(7\otimes 8)=(5\otimes 7)8$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a\otimes 1=a$	$7+0=7$ $\frac{1}{2}\otimes 1=\frac{1}{2}$
Inverso	$a+(-a)=0$	$a\otimes\frac{1}{a}=1$	$17+(-17)=0$ $13\otimes\frac{1}{13}=1$
Distributivo	$a(b+c)=ab+ac$		$5(8\otimes 9)=(5\otimes 8)+(5\otimes 9)$

Ejemplos:

1. Demostraremos y argumentaremos que si a es un número real, entonces es verdad que:

PROPOSICIONES:	RAZONES:
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3)(2)+(3)(a)$	Postulado distributivo
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3a+3*2)$	Postulado conmutativo en el paréntesis derecho
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3a+6)$	Propiedad de sustitución de la igualdad (3*2=6)
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+3a)+(5+6)$	Postulado asociativo
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+3a)+11$	Propiedad de sustitución
$(2a+5)+3(2+a)=(2+3)a+11$	Postulado distributivo
$(2a+5)+3(2+a)=5a+11$	Propiedad de sustitución (2+3=5)

2. Sea una ecuación cuya variable x se encuentra en los reales, encontrar su solución.

En más de una ocasión que hemos demostrado igualdades o realizado despejes, para encontrar valores aplicamos reglas o pasos que son incorrectos, seguir las correctas justificaciones como lo muestran los ejemplos anteriores no solo asegura que hemos realizado de manera adecuada el proceso pedido, sino que nos asegura un resultado correcto. Algunos de nosotros realizamos algunos de estos pasos tal cual los conociéramos a la perfección, lo cual es posible después de realizar muchos ejercicios. Si nuestro proceso es dudoso puede hacernos fallar, por tanto es conveniente no olvidar estas reglas y siempre que sea posible observar un orden en la argumentación de cada nuevo proceso.

PROPOSICIONES:	RAZONES:
$3x+5=23$	Ecuación dada
$3x+5=(18+5)$	Propiedad de sustitución de la igualdad (23=18+5)
$3x+5-5=18+5-5$	Propiedad aditiva de la igualdad (sumar -5 en ambos lados sin alterar la igualdad)
$3x=18$	Postulado del inverso de la suma
$3x=6*3$	Propiedad de sustitución de la igualdad (18=6*3)
$\left(\frac{1}{3}\right)3x=6*3\left(\frac{1}{3}\right)$	Postulado del inverso del producto $\left(\frac{1}{3}\right)*3=1$
$x=6$	Valor de la variable

Ahora bien, todos los enunciados que hemos descrito, tanto en propiedades como en postulados, tienen un primer propósito que es, el de formalizar y hacer válido el tratamiento que podemos hacer de los números en lo general (números reales) y por ende del álgebra. Procederemos ahora a las manipulaciones algebraicas para la solución de ecuaciones.

3.2 Ecuaciones de primer grado

Como ya hemos definido, una ecuación es una expresión algebraica que se define mediante una igualdad. En ocasiones estas igualdades están definidas de manera tal que tienen un uso directo o inmediato, pero la mayoría de las veces la definición primera tiene que volver a definirse para aplicar o interpretar su uso.

Por otro lado, las ecuaciones tienen siempre uno o más términos algebraicos y dependiendo de la cantidad de términos se clasifican como monomios, binomios, etc. y de acuerdo a el grado del exponente más grande como de grado 1, 2, etc.

Finalmente y de manera muy general, cabe mencionar que las ecuaciones siempre tienen un motivo u aplicación, algunos de esos usos los realizamos de manera cotidiana sin considerar siquiera como lo hacemos. En el presente apartado abordaremos las ecuaciones como una manera de operatividad que es una habilidad importante en las matemáticas, pero en lo posible se plantearán situaciones en donde las ecuaciones tengan un significado con nuestra vida diaria.

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado se define como una expresión algebraica donde el grado mayor del exponente es uno, una vez realizadas las operaciones indicadas y reducidos los términos semejantes, a continuación se muestran ejemplos de ecuaciones de primer grado:

$$x = 3 + 2\ ,\ 2x + 3y = 5\ ,\ \frac{a}{b+c} = d\ ,\ 5 - 2d = 9$$

Algunas de las ecuaciones anteriores tienen más de una variable, pero en todos los casos ninguna de éstas tiene como exponente un número distinto de uno, todas son ecuaciones de primer grado. Para manipularlas emplea las ecuaciones de primer grado, que deben cumplir las propiedades de la igualdad y los postulados de campo de los números reales, pues como mencionamos, dichos enunciados encierran en su naturaleza las reglas básicas de las manipulaciones algebraicas. Por lo tanto, aplicaremos lo descrito en los planteamientos y soluciones de ecuaciones de primer grado, quizá no con la detallada descripción de cada uno de los ejercicios mostrados anteriormente, pero sí de una manera práctica y concisa que nos habilite para los futuros usos en la manipulación de ecuaciones y funciones.

Ecuaciones de primer grado con una variable

Dada la ecuación de primer grado:

$$5\text{-}2d=9$$

resolver una ecuación es conocer qué valor hace verdadera la igualdad, esto es que satisface a la ecuación, dicha solución la llamaremos raíz de la ecuación. Así, es el valor que hace verdadera la igualdad, ya que:

$5 - 2(-2) = 9$

$5 + 4 = 9$

$9 \equiv 9$

Para la ecuación:

$$7 - 6(c - 1) + 3(3 - 4c) = 7 + (7c - 4)$$

Es poco práctico tratar de encontrar por tanteos la posible solución. Veamos cómo se resuelve esta nueva ecuación para conocer el valor de su variable de acuerdo al siguiente desarrollo:

Desarrollo:	Argumento:
$7-6(c-1)+3(3-4c)=7+(7c-4)$	Ecuación dada.
$7-6c+6+3(3-4c)=7+(7c-4)$	Desarrollo del producto: $-6(c+1)=-6c+1$
$7+6c+6+9-12c=7+(7c-4)$	Desarrollo del producto: $+3(3-4c)=9-12c$
$7+6c+6+9-12c=7+7c-4$	Desarrollo del producto: $+(7c-4)=7c-4$
$7+6+9-12c+6c=7-4+7c$	Acomodo por términos semejantes
$22-6c=3+7c$	Agrupamiento de términos semejantes $7+6+9=22$, $-12c+6c=-6c$ y $7-4=3$
$22-6c-22=3+7c-22$	Restando en ambos lados de la igualdad
$6c=7c-19$	Reduciendo
$6c-7c=7c-19-7c$	Restando ahora $-7c$ -en ambos miembros
$-1c=-19$	Reduciendo
$c=19$	Multiplicando en ambos lados por -1

Como puedes ver, en términos generales realizar un despeje o realizar las manipulaciones correspondientes que nos permitan encontrar el valor de una variable puede ser una tarea larga, pero si se observan cada una de las descripciones anteriores puedes con mucha facilidad realizar un proceso similar omitiendo algunos argumentos, siempre y cuando estemos seguros de que no se ha omitido alguno en único apartado de la igualdad y de que se lleve siempre el orden adecuado y no se omitan algunos de los postulados ya mencionados. De esta forma, desarrollemos un nuevo ejercicio de manera aún más práctica que de la misma manera nos llevará a encontrar el valor de una variable determinada.

Encontremos el valor de r en la siguiente ecuación:

Desarrollo:	Argumento:
$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$	Ecuación dada
$2-3r+21-7r=4r-8+8$	Desarrollo de productos con paréntesis
$+23-10r=4r$	Agrupamiento de términos semejantes de cada lado
$+23=14r$	Suma de $+10r$ en cada miembro de la igualdad
$\frac{23}{14}=\frac{14r}{14}$	División entre 14
$r=\frac{23}{14}$	Resultado final, intercambiando términos en la igualdad

Finalmente, los argumentos deben ser claros, en el orden definido y no necesariamente debe usarse una tabla para el acomodo del proceso. Realizar algunos ejercicios es muy adecuado para poder confiar en nuestros procesos y nos hace eficientes en el proceso del cálculo de las variables buscadas.

Por otro lado, podemos para cada uno de los casos en que se pide encontrar el valor de la variable en las ecuaciones, realizar la respectiva comprobación para saber que el valor encontrado ha sido correcto. El proceso es sencillo e igualmente tiene que ver con las propiedades de los números reales. Haremos de forma sencilla y directa la comprobación del ejemplo anterior.

Definida la igualdad:

$$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$$

comprobar que el valor $r=\frac{23}{14}$ es correcto.

Procedemos a sustituir el valor encontrado en la ecuación dada:

$$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$$

$$2-3((23/14)-7)-7(23/14)=4((23/14)-2)+8$$

Desarrollando:

$$2-3(-75/14)-(23/2)=4(-5/14)+8$$

$$2+225/14-23/2=-10/7+8$$

$$253/14-23/2=46/7$$

$$46/7=46/7$$

De esta manera, la igualdad se cumple con el valor encontrado lo que nos demuestra que este es correcto.

Para resolver:

En parejas resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y hacer la comprobación.

1. 5 + 6x = 2
2. 4b + 1 = -18
3. 18c - 3 = 0
4. 5 - 2d = 9
5. - 3f + 1 = 4
6. - 2 - 5g = 0
7. 13 - h = 13
8. 5j - 9 = 3j + 5
9. 2k + 7 = 12 - 3k
10. 10 - 4x = 7 - 6x
11. 5m - 3,2 = 2m + 2,8
12. 5n - 2n + 12 = 35 - 4n - 9
13. 3ñ - 15 + 2ñ - 14 = ñ - 11
14. 48p - 13 + 12p = 72p - 3 - 24p
15. q - 3 + 6q - 9 + 12q - 15 = q
16. 6r + 12r - 9 - 8r + 10 + r = 0
17. 5s + (4 - s) = 9 - (s - 6)

18. $(3t - 1) + 7 = 8t - (3 - 2t)$

19. $3 - (8v-5) + (6-7v) - 1 = 7 - (v-1) + (4v+4)$

20. $(3w - 8) - (4 - 9w) + 3 = 7w - 2 - (5w + 9 - 3)$

21. $-(4x-6+5x) + (9-5x+3-2x) = 7x - (1 - 6x)$

22. $12y = 3(3y - 5)$

23. $3z - 1 = 2(z - 1)$

24. $2(b + 2) - 5(2b - 3) = 3$

25. $7 - 6(c - 1) + 3(3 - 4c) = 7 + (7c - 4)$

26. $4-2(d + 7)-(3d + 5)=2d+(4d-9+3d)-(d - 3)$

27. $8(6f - 14)-7(12 - 5f)+(23f + 2)-(2f + 65) = 0$

28. $21 - [5g - (3g - 1)] - g = 5g - 12$

29. $40h - [24 - (6h + 8) - (5 - 2h)] = 3-(8h - 12)$

30. $3[2 - (3j - 6)] + 4[6j - (1 - 2j)] = 4 - 5j$

31. $2 - \{k - [6k - (1 - 2k)]\} = 100$

32. $3[2x - (5x + 2)] + 1 = 3x - 9(x -3)$

33. $2 - \{2m + [2m - (2 - 2m)]\} = 2$

34. $34 - 52(12n - 34) + 235 = 32 + 101(35n\ 1)$

35. $2 - (3\tilde{n} + 4)-(5\tilde{n} - 6)-(7\tilde{n} - 8)-(9\tilde{n} - 10)= =11$

36. $2[7p - 2(p - 1)] + 3(4p + 7) = 5 - (p - 1)$

37. $8\{2 - [q + 2(q - 3)] + 1\} = 3 - (8 - 3q)$

38. $2 - 3(r - 7) - 7r = 4(r - 2) + 8$

39. $3.37 - (1.5s + 2.3) = 3.4s - (0.4 - 5.7s)$

40. $(t - 3)^2 - (t - 2)^2 = 5$

Sistemas de ecuaciones lineales

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas matemáticos más antiguos y presenta una conexión con la actividad práctica. Se han encontrado sistemas de ecuaciones lineales en la matemática mesopotámica, medieval, china y japonesa. En 1678 el matemático alemán Leibniz fue el primero en proponer un método general de resolución y manejo de los determinantes, en 1693 dio ejemplos de sistemas de ecuaciones con coeficientes, de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y eliminando las variables obtenía una expresión como determinante utilizando la notación con subíndices. Sin embargo, fue Maclaurin quien usó el método de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2, 3 y 4 incógnitas. El Suizo Cramer hacia 1750 propuso auxiliándose de expresiones similares a los determinantes, un método para la resolución de un sistema de **n** ecuaciones con **n** variables. Además matemáticos de los siglos XVIII y XIX continuaron estas investigaciones, Laplace por ejemplo, obtuvo el desarrollo de los determinantes, Lagrange estudió identidades de determinantes funcionales de 3×3 , en 1773. Cauchy dedujo la ley de multiplicación, gracias a Jacobi en 1826 los determinantes se convirtieron en patrimonio general de los matemáticos, llegando a ser utilizados ampliamente en los sistemas de ecuaciones lineales, geometría y en análisis.

El matemático Irlandés Sylvester introdujo las matrices haciendo uso del rango, su amigo y colega Cayley creó el cálculo matricial e hizo notar que las matrices son una forma de expresión abreviada para las sustituciones lineales[58].

Actualmente, los planteamientos de soluciones y aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales tienen una amplia aplicación en la ciencia y la tecnología, y se desarrollan principalmente por medio de algoritmos computacionales, pues algunos de estos llegan a ser compuestos por cientos o miles de ecuaciones con igual número de incógnitas.

Un sistema de ecuaciones es una colección de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables, por ejemplo:

$a)\begin{cases} 2x + y = 3 \ldots\ldots\ldots(1) \\ -4x + 8y = -2 \ldots(2) \end{cases}$ sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

b)$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \ldots(1) \\ x + y + z = 4 \ldots(2) \\ x - y - z = 0 \ldots(3) \end{cases}$ sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

Utilizamos una llave para indicar el sistema de ecuaciones, es conveniente numerar cada ecuación del sistema. Una solución de un sistema de ecuaciones consta de valores para las variables, los cuales hacen verdadera cada ecuación del sistema. Resolver un sistema de ecuaciones significa determinar todas las soluciones del sistema[59]. Un sistema de ecuaciones lineales se denomina consistente si tiene al menos una solución. Un sistema sin soluciones es conocido como inconsistente.

Una ecuación con n variables es lineal si es equivalente a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Donde $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ son variables distintas mientras que $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, b$ son constantes y al menos una de las constantes a es distinta de cero[60].

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones: suma y resta también conocido como reducción, sustitución, igualación, por determinantes y gráfico.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se le llama sistema de ecuaciones a la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas[61], en nuestro caso, de ecuaciones lineales o de primer grado.

Recordemos que cada ecuación representa geométricamente una recta y que dos rectas pueden ser paralelas, lo cual significa que tienen soluciónes o puntos en común. Pueden cortarse en un punto, por lo que tienen una solución y se llaman simultáneas, o estar una recta sobre la otra y entonces tienen infinitas soluciones o puntos en común, en nuestros ejemplos sólo utilizaremos sistemas de ecuaciones simultáneas, es decir siempre tendrán solución o un punto en común.

Método de suma y resta o reducción

En este método se trata de igualar los coeficientes de una de las incógnitas, para después sumar o restar las dos ecuaciones y así eliminar una de las incógnitas, veamos ejemplos de ello.

Resolver por el método de suma y resta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 6\mathrm{y} = 27 \text{ ...ecuación 1} \\ 7\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 9\text{...ecuación 2} \end{cases}$$

En este sistema lo más conveniente es multiplicar la ecuación 1 por -7 y sumarla con la ecuación dos para eliminar la incógnita x

$$-7(x + 6y) = -7(27)$$

$$-7x - 42y = -189$$

Esta nueva forma de representar a la ecuación 1 la sumamos con la ecuación 2 y obtenemos:

$$\begin{array}{r} -7x - 42y = -189 \\ 7x - 3y = 9 \\ \hline 0 - 45y = -180 \end{array}$$

Por lo tanto, teniendo este resultado podemos obtener:

$$y = \frac{-180}{-45} = 4$$

Una vez obtenido el valor de y=4, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones 1 o 2, y se obtiene el valor de x:

$$x + 6y = 27$$

$$x + 6(4) = 27$$

$$x + 24 = 27$$

$$x = 27 - 24 = 3$$

Si en lugar de sustituir y =4 en la ecuación 1, se hace en la 2, obtendremos el mismo resultado, ya que este valor satisface a ambas ecuaciones, así la solución es x =3 y $y = 4$ mediante la coordenada (3,4).

Veamos ahora si estos valores satisfacen a ambas ecuaciones. Para esto sustituimos en las ecuaciones originales los valores obtenidos; veamos primeramente lo relativo a la primera de las ecuaciones:

$$-7x - 42y = -189$$
$$-7(3) - 42(4) = -189$$
$$-21 - 168 = -189$$
$$-189 = -189$$

Hacemos lo mismo en la ecuación 2 para comprobar que nuestras soluciones son correctas:

$$7x - 3y = 9$$
$$7(3) - 3(4) = 9$$
$$21 - 12 = 9$$
$$9 = 9$$

Resolver por el método de suma y resta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x - 4y = 41 \text{ ...ecuación 1} \\ 11x + 6y = 47 \text{...ecuación 2} \end{cases}$$

Para este sistema debemos buscar que los coeficientes de x o de y sean además de iguales, de signo contrario. A simple vista no encontramos por qué número multiplicar las ecuaciones, conviene encontrar el mínimo común múltiplo de los coeficientes, trabajemos en eliminar la y, por lo que usamos el -4 y el 6, ya tienen signo contrario que los eliminará, ahora busquemos el mcm como lo viste en las unidades anteriores, encontrarás que es 12, por lo que nos indica que el -4 hay que multiplicarlo por 3 y el 6 por 2, y tendremos:

$3[3x - 4y] = 3[41]$ además, para la segunda: $2[11x + 6y] = 2[47]$

De esta manera, las ecuaciones nos resultan de forma simultánea:

La suma de estas nuevas ecuaciones será:

$$31x = 217$$

lo cual de manera evidente nos resultaría para el valor de $x = \frac{217}{31}$ que nos resulta en un valor para $x = 7$.

Este nuevo valor nos ayuda a calcular el resultante valor de y. Para ello, al igual que en el caso anterior, podemos sustituir el valor encontrado de x =7 en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Tomemos la primera y desarrollemos:

$3x - 4y = 41$

$3(7) - 4y = 41$

$21 - 4y = 41$

$-4y = 41 - 21$

$-4y = 20$

$y = \dfrac{20}{-4} = -5$

Queda comprobar que los valores encontrados x =4 y y =-5 satisfacen ambas ecuaciones, las soluciones también son llamadas raíces de la ecuación.

Método de sustitución

Otro método de resolución es el llamado por sustitución, el cual lo indicaremos por pasos y lo explicaremos mediante el siguiente ejemplo:

Resolvamos el sistema: $\begin{cases} x + 3y = 6 \text{ ... ecuación 1} \\ 5x - 2y = 13 \text{...ecuación 2} \end{cases}$

Paso I: despejamos una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones.

En nuestro ejemplo despejamos x de la primera ecuación:

$x = 6 - 3y$

Paso II: sustituimos el valor obtenido de x en la otra ecuación

$5(6 - 3y) - 2y = 13$

$30 - 15y - 2y = 13$

$-17y = 13 - 30$

$-17y = -17$

$$y = \frac{-17}{-17} = 1$$

Paso III: como ya hemos encontrado un valor, ahora sustituimos este valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones dadas en un principio. Podemos observar que en el Paso I ya se ha dejado una ecuación en función de y, así que ahí podemos sustituir como:

$x = 6 - 3y$

$x = 6 - 3(1)$

$x = 3$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 6\text{x} - 5\text{y} = -9 \text{ ...ecuación 1} \\ 4\text{x} + 3\text{y} = 13\text{...ecuación 2} \end{cases}$$

Paso I: despejamos x de la primera ecuación:

$6x = -9 + 5\text{y}$

$$x = \frac{-9 + 5y}{6}$$

Paso II: sustituimos en la segunda ecuación:

$$4\left(\frac{-9 + 5y}{6}\right) + 3y = 13$$

Reducimos la fracción: $2\left(\frac{-9 + 5y}{3}\right) + 3y = 13$

Multiplicamos todo por 3 para quitar el denominador:

$$3\left[2\left(\frac{-9 + 5y}{3}\right) + 3y\right] = 3[13]$$

Se elimina un 3 que multiplica con un 3 que divide ($\frac{3}{3} = 1$), solamente en el primer término ya que estamos aplicando la propiedad distributiva.

$[2(-9 + 5y) + 9y] = 39$

$-18 + 10y + 9y = 39$

Reducimos: $19y = 39 + 18$, $19y = 57$, $y = \frac{57}{19}$, y=3

Paso III: sustituimos y=3 en el despeje del paso I:

$x = \frac{-9 + 5(3)}{6}$ $x = \frac{6}{6}$ $x = 1$

Resultado: (1,3) o x =1, y =3

Método de igualación

Recuerda que un sistema de ecuaciones lineales representa geométricamente dos rectas y como se indicó al inicio en nuestros ejemplos, son dos rectas que se cortan en un punto en común, este método también llamado método gráfico consiste en graficar las dos rectas y buscar el punto de intersección de ambas, veamos con un ejemplo cómo hacerlo.

$$\begin{cases} x - y = 1 \text{ ...ecuación 1} \\ x + y = 7 \text{...ecuación 2} \end{cases}$$

Paso I: despejar y de cada ecuación.

$y = x - 1$...ecuación 1

$y = 7 - x$...ecuación 2

Se igualan las dos variables despejadas, pues en teoría son dos literales iguales, por tanto se puede expresar la igualdad como:

$$y = y$$
$$x - 1 = 7 - x$$
$$x + x = 7 + 1$$
$$2x = 8$$
$$x = \frac{8}{2} = 4$$

De forma similar, podemos encontrar el valor de la variable restante, lo cual se puede hacer mediante una sustitución en cualquiera de las ecuaciones. Así, tomando la primera ecuación:

$$y = x - 1$$
$$y = (4) - 1 = 3$$

Por lo tanto, la solución para este sistema es el par ordenado como (4,3)

Para practicar:

En parejas resolver cada una de las siguientes ecuaciones simultáneas, con dos variables, por el método de suma y resta, sustitución e igualación. Comprueba tus resultados.

1.

$$\begin{cases} 2y-3x=6 \\ 6x-y=4 \end{cases}$$

Sol. x=14/9, y=16/3

2.

$$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 6x+y=4 \end{cases}$$

Sol. x=2/9, y=8/3

3.

$$\begin{cases} x-y=6 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$$

Sol. x=10/3, y=-8/3

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Una ecuación lineal de primer grado con tres incógnitas puede representarse como: $ax+by+cz=d$

Las ecuaciones de primer grado con tres incógnitas se aplican en forma de conjuntos de ecuaciones agrupadas de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas puede representar entre otras cosas tres planos en el espacio, con una gráfica de tres dimensiones y la solución que es una triada de valores (x,y,z) es un punto en el espacio en donde estos tres planos en el espacio se cruzan. Sin embargo, al tener sistemas de más ecuaciones e incógnitas no puede darse un significado tangible único como por ejemplo para un cuerpo en el aire en movimiento señala un desplazamiento de 3 dimensiones[62].

Los métodos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas son semejantes a los examinados para las ecuaciones con dos incógnitas, el razonamiento es el mismo: tratar de encontrar cierta solución común a las tres ecuaciones. De acuerdo al grado de dificultad que implica el uso algebraico de tres incógnitas, solo analizaremos los métodos de solución por eliminación y por determinantes.

Método de eliminación

El método más directo para llegar a las soluciones y que nos lleva a las técnicas matriciales es el de eliminación. El primer propósito es reducir el sistema de tres incógnitas a un sistema de dos incógnitas. Después resolver este sistema, como se desarrolló anteriormente.

Ejemplo: resolver el siguiente sistema por el método de eliminación:

$$\begin{cases} x-2y+1=-3z \\ 2x+y+z=6 \\ 3y-2z-13=-x \end{cases}$$

Las ecuaciones deberán tener la forma $ax+by+cz=d$, para un mejor orden la solución conveniente es numerarlas, por lo tanto:

1. $x-2y-3z=-1$
2. $2x+y+z=6$
3. $x+3y-2z=13$

Enseguida analiza cuidadosamente las tres ecuaciones y elige la variable que se vaya a eliminar. La regla de elección es determinar cuál de las tres variables presenta mayor simplicidad para que, al ser multiplicada por un factor, se obtengan coeficientes simétricos en dos de las ecuaciones del sistema[63].

En esta ocasión x tiene el mismo coeficiente en la ecuación (1) y (3) y el coeficiente de la ecuación (2) es múltiplo de las otras dos. Entonces, nuestros pares de ecuaciones estarán formados por las ecuaciones 1 y 3 y por las ecuaciones (2) y (3).

Entonces el primer par de ecuaciones es:

1. $x - 2y - 3z = -1$
3. $x + 3y - 2z = 13$

Ahora la ecuación (1) se multiplica por (-1), enseguida se suma a la ecuación (3), obteniendo así la ecuación (4).

$$\begin{array}{rr} & -x + 2y + 3z = 1 \\ & x + 3y - 2z = 13 \\ \hline 4) & 5y + z = 14 \end{array}$$

El segundo par de ecuaciones es:

2. $2x + y + z = 6$
3. $x + 3y - 2z = 13$

En este caso la ecuación (3) se multiplica por (-2), enseguida se suma a la ecuación (2) obteniendo ahora la ecuación (5).

$$\begin{array}{rr} & 2x + y + z = 6 \\ & -2x - 6y + 4z = -26 \\ \hline 5) & -5y + 5z = -20 \end{array}$$

Observemos que las ecuaciones resultantes (4) y (5) tienen dos incógnitas que son: **y** , de modo que ahora buscamos la forma de reducir una de las dos incógnitas para despejar la otra. En esta ocasión, los coeficientes de y son simétricos, así que al sumarlas se eliminará esta variable.

$$\begin{array}{r} 5y + z = 14 \\ -5y + 5z = -20 \\ \hline 6z = -6 \end{array}$$

De la ecuación resultante (6z=-6), se despeja :

$$z = \frac{-6}{6} = -1$$

Ahora sustituimos el valor de z en la ecuación 4 ó 5 para conocer y. Por simplicidad sustituimos en la ecuación 4:

$$5y + z = 14$$
$$5y + (-1) = 14$$
$$5y - 1 = 14$$
$$5y = 14 + 1$$
$$y = \frac{15}{5}$$
$$y = 3$$

Finalmente sustituimos las dos incógnitas encontradas en una de las tres ecuaciones originales. Por simplicidad, sustituimos en la ecuación (1):

$$x - 2y - 3z = -1$$
$$x - 2(3) - 3(-1) = -1$$
$$x - 6 + 3 = -1$$
$$x = -1 - 3 + 6$$
$$x = 2$$

Podemos verificar que los valores hallados cumplan con las tres ecuaciones originales, primero para la ecuación 1:

$$x - 2y - 3z = -1$$
$$(2) - 2(3) - 3(-1) = -1$$
$$2 - 6 + 3 = -1$$
$$-1 = -1$$

Para la ecuación 2:

$$2x + y + z = 6$$
$$2(2) + 3 + (-1) = 6$$
$$4 + 3 - 1 = 6$$
$$6 = 6$$

Y por último para la ecuación 3:

$$x + 3y - 2z = 13$$
$$2 + 3(3) - 2(-1) = 13$$
$$2 + 9 + 2 = 13$$
$$13 = 13$$

Hay una solución, que es la triada ordenada: (2,3,-1) para los valores x,y,z respectivamente.

Método de determinantes

El método de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2, 3 y 4 incógnitas, fue empleado en 1748 por Colín Maclaurin. En el siglo XIX el matemático francés Agustín Louis Cauchy utilizó la palabra determinante y demostró el teorema de la multiplicación para matrices; además presentó resultados en la diagonalización de matrices, en este mismo siglo el matemático alemán Carl Gustav Jacobi incluyó y explicó el concepto de determinante aplicándolo al estudio de las funciones de varias variables múltiples. El primero en utilizar la palabra matriz fue el matemático británico James Joseph Sylvester en 1850 para diferenciar determinante[64].

Un determinante se puede definir como un acomodo de coeficientes organizados en filas y columnas, las cuales dependerán del orden que tenga este y se puede representar con det A, Δ (delta) o bien |A|, este último no deberás confundirlo con el valor absoluto de A.
Una matriz es una agrupación de números o elementos listados de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observa que los subíndices representan el número de filas y columnas en que están ubicados. Por ejemplo: está ubicado en la tercera fila de la segunda columna.
Cuando el número de filas es igual al número de columnas se dice que es una matriz cuadrada. Cabe señalar que para calcular el determinante de una matriz es indispensable que sea cuadrada, es decir: que el número de filas y columnas sea al mismo[65].
Ejemplos de matrices:

3 x 1: $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 3 x 2: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 3 x 3: $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 12 \end{bmatrix}$ 1 x 3: $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

Estos arreglos vienen dados regularmente sólo por los valores numéricos de las ecuaciones, es decir por los coeficientes numéricos de las ecuaciones, razón por la cual se les llama *matriz de coeficientes*. Por otro lado, aunque no hemos definido el método completo de solución de los sistemas de ecuaciones, diremos que es importante definir que estas matrices pueden tener un valor numérico; este valor numérico se calculará por medio de un proceso llamado determinante. Así, el determinante de una matriz de orden 2 x 2 se calcula mediante una fórmula específica, misma que se define como:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo: hallar el valor del determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: aplicando la definición de determinantes.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = (6)(-1) - (-5)(-3) = -6 - 15 = -21$$

Si tenemos el caso de un determinante de una matriz de orden 3 x 3, aplicaremos igualmente un algoritmo específico, que nos dará un valor numérico y que tendrá como base de solución el sistema anteriormente abordado (determinante de 2x2). El algoritmo o fórmula para su cálculo puede definirse como:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Hallar el valor del determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la definición de determinantes de este orden:

$$A=\begin{bmatrix}-8 & 12 & -5\\ 6 & 4 & 2\\ -9 & 11 & -3\end{bmatrix}=-8\begin{vmatrix}4 & 2\\ 11 & -3\end{vmatrix}-12\begin{vmatrix}6 & 2\\ -9 & -3\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}6 & 4\\ -9 & 11\end{vmatrix}=\dots$$

$$\dots-8(-12-22)-12(-18+18)-5(66+36)=-8(-34)-12(0)-5(102)=272-510=-238$$

El ejemplo anterior es entonces el resultado del cálculo del determinante de un sistema de coeficientes del sistema A, en otras palabras: el valor del determinante A.

El uso del cálculo de los determinantes se verá a continuación para el cálculo de los sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.

Solución de un sistema de ecuaciones de 3 x 3 por el método de Cramer

El método de Cramer se utiliza cuando se quiere resolver un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes de matrices, donde el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y donde sus coeficientes son diferentes de cero. Analicemos un ejemplo:

resolver el siguiente sistema con la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x+2y-2z=15\\ 4x-\ \ y+3z=-5\\ x+2y-\ \ z=14\end{cases}$$

Primeramente hay que verificar cuales son las variables del sistema. En este caso sus variables son x,y,z ,las cuales adquieren la forma (x,y,z) .

Ahora hacemos un arreglo de los coeficientes para resolver los valores (D, Dx, Dy, Dz)

Si definimos los determinantes anteriores de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x+a_{1,2}y+a_{1,3}z=b_1\\ a_{2,1}x+a_{2,2}y+a_{2,3}z=b_2\\ a_{3,1}x+a_{3,2}y+a_{3,3}z=b_3\end{cases}$$

Entonces los respectivos determinantes (que ya hemos analizado cómo resolver) serán:

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_{1,2} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

Es decir el determinante general se define solamente con los coeficientes numéricos del sistema de ecuaciones, el determinante de x se define cambiando la columna primera por los valores resultado de cada una de las ecuaciones (que hemos llamado a estos coeficientes términos independientes y se denotan con *b)*. La solución de cada uno de los valores se definirá una vez calculados los determinantes aquí descritos con las siguientes fórmulas:

$$x=\frac{Dx}{D},\ y=\frac{Dy}{D},\ z=\frac{Dx}{D}$$

De acuerdo al sistema dado, procedemos entonces a calcular el determinante general o del sistema:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1\left[(-1)(-1)-(3)(2)\right]-2\left[(4)(-1)-(3)(1)\right]+(-2)\left[(4)(2)-(-1)(1)\right]$$

Realizando las respectivas operaciones tendremos:

$$=1\left(1-6\right)-2\left(-4-3\right)-2\left(8+1\right)=1(-5)-2(-7)-2(9)=-5+14-18=-9$$

Ahora calculamos Dx, para hacerlo sustituimos los respectivos valores en el determinante que definimos como Dx, quedando la definición del mismo con su respectivo cálculo como:

$$Dx=\begin{vmatrix}15 & 2 & -2\\ -5 & -1 & 3\\ 14 & 2 & -1\end{vmatrix}=15\left[(-1)(-1)-(3)(2)\right]-2\left[(-5)(-1)-(3)(14)\right]+(-2)\left[(-5)(2)-(-1)(14)\right]$$

$$Dx=15\left[1-6\right]-2\left[5-42\right]+(-2)\left[-10+14\right]=15(-5)-2(-37)-2(4)=-9$$

Luego calculamos Dy:

$$Dy=\begin{vmatrix}1 & 15 & -2\\ 4 & -5 & 3\\ 1 & 14 & -1\end{vmatrix}=1\left[(-5)(-1)-(3)(14)\right]-15\left[(4)(-1)-(3)(1)\right]+(-2)\left[(4)(14)-(-5)(1)\right]$$

$$Dy=1\left[5-42\right]-15\left[-4-3\right]-2\left[56+5\right]=1(-37)-15(-7)-2(61)=-54$$

Finalmente calculamos Dz:

$$Dz=\begin{vmatrix}1 & 2 & 15\\ 4 & -1 & -5\\ 1 & 2 & 14\end{vmatrix}=1\left[(-1)(14)-(-5)(2)\right]-2\left[(4)(14)-(-5)(1)\right]+15\left[(4)(2)-(-1)(1)\right]$$

$$Dz=1[-14+10]-2[56+5]+15[8+1]=1(-4)-2(61)+15(9)=9$$

La solución del sistema, serán los valores que se calculen de acuerdo a las definiciones de cada variable (ya descritas anteriormente), así que con la sustitución de valores, tendremos:

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-9}{-9}=1$$

$$y=\frac{Dy}{D}=\frac{-54}{-9}=6$$

$$z=\frac{Dz}{D}=\frac{9}{-9}=-1$$

Por tanto, el conjunto solución para este sistema será la triada (1,6,-1) o bien: x=1, y=6, z=-1. Igual que en los casos anteriores, este conjunto solución puede comprobarse sustituyendo los valores encontrados en cada una de las ecuaciones originales para comprobar la igualdad de cada una. De esta forma y de manera resumida en cuanto a operaciones podemos decir que:

$$\begin{cases} x+2y-2z=(1)+2(6)-2(-1)=1+12+2=15\\ 4x-y+3z=4(1)-(6)+3(-1)=4-6-3=-5\\ x+2y-z=(1)+2(6)-(-1)=1+12+1=14\end{cases}$$

Para resolver:

En parejas resolver cada una de las siguientes ecuaciones simultáneas, con dos variables, por el método de eliminación y determinantes. Comprueben sus resultados.

	1. $\begin{matrix} 3x-2y+z=-4 \\ x+y+4z=2 \\ x+7y+z=5 \end{matrix}$, $x=-1, y=\frac{7}{9}, z=\frac{5}{9}$-
2.- $\begin{matrix} 2x-3y-5z=-19 \\ 3x-4y+z=-2 \\ x+y+z=6 \end{matrix}$, $x=1, y=2, z=3$	3.- $\begin{matrix} 2x-3y-4z=5 \\ 5x-4y-2z=4 \\ 6x-9y-12z=5 \end{matrix}$, sin *solucion*

3.3 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación que se puede expresar de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son números reales y constantes[66], recibe el nombre de ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado. Si la ecuación se expresa en función de una nueva variable, entonces será una función. Las funciones cuadráticas tienen la forma:

$f(x)=y=ax^2+bx+c$

Esta nueva notación puede tener la definición a partir del valor de *f(x)* que nos representa precisamente la relación que hay de toda la ecuación o lado derecho de la igualdad en función de la variable x, de la forma definida a partir de y, tiene más bien una relación con la representación gráfica, pues como es bien conocido en una representación gráfica hay una relación de acuerdo a las variables en los ejes coordenados X y Y.

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican en función del tipo de términos que presente, la **completa** $ax^2+bx+c=0$ se caracteriza por presentar los tres términos (el del coeficiente cuadrático ax^2, el lineal bx y el llamado término independiente ***c)***. Una ecuación cuadrática puede también ser incompleta por presentar sólo dos términos, puede ser $ax^2 + c = 0$ **pura** ,o bien $ax^2 + bx = 0$ **mixta**[67], algunos[68] ejemplos de los tipos de ecuaciones cuadráticas serían:

$$\text{Ecuación cuadrática completa}\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ 3x^2 + \dfrac{3}{2}x + 2 = 0 \\ -8x^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ecuación cuadrática incompleta}\begin{cases} pura\begin{cases} ax^2 + c = 0 \\ 5x^2 - 3 = 0 \\ -3x^2 + \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases} \\ mixta\begin{cases} ax^2 + bx = 0 \\ 5x^2 + 6x = 0 \\ 3x^2 - 6x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Desde la antigüedad se utilizaban algunos métodos para dar solución a ecuaciones cuadráticas. De acuerdo a los escritos de Al-Khwarizmi alrededor de 820 d. de C., ya se estudiaban casos particulares de problemas como el de áreas rectangulares conociendo el área total del lote, la diferencia entre la base y la altura del rectángulo. Ellos completaban el cuadrado, posteriormente en el año 2000 a. de C. aproximadamente, los babilonios daban solución a los problemas con un método semejante y en tablas hechas de barro escribían los desarrollos del problema de acuerdo a las dimensiones del rectángulo[69].

Alrededor del año 300 a. de C. Euclides presentó algunas soluciones para encontrar el área de un rectángulo y su procedimiento de solución es el más semejante al que utilizamos en la actualidad que le llamamos completar cuadrados[70].

Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas con una variable

A la solución de una ecuación cuadrática también se le conoce como raíz de la ecuación, estas pueden ser reales o imaginarias, por lo que debes de recordar las propiedades de los números reales y complejos[71]. Empezaremos a dar solución a las ecuaciones cuadráticas por diversos métodos como: factorización, completando el trinomio cuadrado perfecto, por fórmula general y por uso del discriminante.

Método de Factorización

Este método lo emplearemos solo si la ecuación es factorizable y tomaremos de referencia el siguiente teorema[72], también conocido como la propiedad del factor cero[73] :
Si a y b pertenecen a los números reales.
Si $ab = 0,\ entonces\, a = 0$ ó $b = 0$
La propiedad el factor cero nos indica que si el producto de dos o más números es cero, entonces al menos uno de los números es cero. Veamos algunos ejemplos aplicando este método de factorización en las ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo: utilizando factorización resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Se buscan dos números que multiplicados nos den -10 y sumados o restados esos dos números nos den -3. Estos números pueden ser 10 y 1 o 5 y 2, vemos que estos 2 últimos son los que cumplen con la condición descrita. Después, se forman 2 binomios, el primer término la raíz de x^2 y el segundo con los valores 5 y 2 con los signos adecuados -5, y 2.

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

Para que esta condición se cumpla, uno de los factores (en este caso binomio) debe ser cero, por lo que se iguala cada binomio a cero y se resuelve a partir de la condición:

$$x - 5 = 0$$

lo que nos da:

$$x = 5$$

que es la primera solución.

Para la siguiente solución se toma el siguiente factor que es x+2, el cual de acuerdo a la condición del producto igual a cero nos hace proponer que: x+2=0, de donde:

X=-2

Recordando que la ecuación cuadrática, presenta dos soluciones.

Encuentre el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática:

$x^2 + 6x - 16 = 0$

utilizando factorización.

Lo desarrollamos de manera análoga al ejemplo anterior:

$(x+8)(x-2) = 0$

$x + 8 = 0;\ x = -8$ primera solución

$x - 2 = 0;\ \ x = 2$ segunda solución

Encontremos por factorización, el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x = 0$$

Es una ecuación cuadrática incompleta mixta, que presenta el mismo factor en cada uno de sus términos, por lo que aplicamos el método de factor común[74], este método consiste en buscar el máximo común divisor de los coeficientes de cada término de la ecuación cuadrática, a este término se le adiciona la o las literales repetidas en los dos términos y con el menor exponente. Este término es el factor común, veamos el desarrollo del ejemplo:

$x(x-3) = 0$; igualando a cero cada factor tendríamos:

$x = 0,$ primera solución

x-3=0

x=3, segunda solución

Hallaremos por factorización el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 36 = 0$$

Como corresponde a una ecuación cuadrática incompleta pura, su solución es inmediata despejando la incógnita[75]

$$x^2 - 36 = 0$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$

soluciones

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = -6$$

Método Completando el trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P).

Recordando el tema de productos notables, el cuadrado de un binomio nos da un trinomio cuadrado perfecto[76], por ejemplo $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de un binomio. Considerando la siguiente expresión como un trinomio cuadrado perfecto:

$r^2 + 2rt + t^2 = (r+t)^2$ de manera análoga tendríamos: $r^2 - 2rt + t^2 = (r-t)^2$

Las propuestas anteriores pueden ayudarnos a recordar algunas características de un trinomio cuadrado perfecto, en donde dos de los términos deben de estar al cuadrado: r^2 y t^2 además ser positivos. Si multiplicamos sus raíces; r y t y duplicamos el resultado, se obtiene el segundo término, o su inverso aditivo,-2rt. Esta explicación tratando de mostrarla en forma concreta puede resultar confusa, pero veamos algunos ejemplos para dejarla mas clara:

Completar el trinomio cuadrado perfecto para dar con la solución de la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 2x - 8 = 0$

De la ecuación original despejamos el término independiente, 8 para nuestro caso: $x^2 + 2x = 8$, de aquí podemos ver que el coeficiente de **x** es 2, por tanto se toma la mitad que nos daría 2/2=1; este resultado se eleva al cuadrado $1^2=1$, y lo sumamos en ambos miembros de la ecuación y obtenemos: $x^2+2x+1=8+1$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado se obtiene:

$(x+1)(x+1)=9$

$(x+1)^2=9$

Sacamos raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos:

$x+1=\pm\sqrt{9}$

Despejamos y las soluciones son:

$x_1=-1+3;\quad x_1=2$

$x_2=-1-3;\quad x_2=-4$

Resolviendo la ecuación $2x^2-3x-14=0$, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Siendo $2x^2-3x-14=0$ la ecuación dada; dividimos ambos lados entre 2:

$$\frac{2x^2-3x-14}{2}=\frac{0}{2}$$

Sumando 7 en ambos lados:

$$x^2-\frac{3}{2}x=7$$

Completando el trinomio cuadrado en ambos lados;

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=7+\frac{9}{16}$$

Factorizando:

$$(x-\frac{3}{4})^2=\frac{121}{16}$$

Despejando el cuadrado: $(x-\frac{3}{4})=\pm\sqrt{\frac{121}{16}}$

Calculando la raíz $(x-\frac{3}{4})=\pm\frac{11}{4}$

Sumando en ambos lados: $x_1=\frac{3}{4}+\frac{11}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

Calculando finalmente la segunda incógnita:

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{11}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$x_1 = \frac{7}{2}$ y Siendo estos últimos los resultados.
$x_2 = -2$

Para practicar:

En equipos de tres, determinar las raíces de las siguientes ecuaciones de 2º grado, completando el trinomio cuadrado perfecto:

1.- $x^2 + 5x + 4 = 0$

2.- $6x - 27 = -x^2$

3.- $x^2 + 11x + 30 = 0$

4.- $y^2 + 10 = 6y$

5.- $w^2 - 40 = 3w$

6.- $2x + 5 = -x^2$

7.- $3x^2 = x + 2$

8.- $-3x^2 + 7x + 6 = 0$

Método por Fórmula General

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ en donde por condición debe cumplirse que $a \neq 0$, podemos aplicar la fórmula general, que surge de despejar el valor de x de la ecuación anterior y resulta[77] :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo que las soluciones de una ecuación cuadrática son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelve la ecuación $6x^2+7x+2=0$, mediante la fórmula general.

Partiendo de la fórmula general y considerando: $ax^2+bx+c=0$, que los coeficientes serán: $a=6, b=7, c=2$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación original tenemos:

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$$

Cada valor se calcularía como:

$$x_{1,2}=\frac{-7+\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-7-\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$$

De esta manera el cálculo para cada uno de los resultados es:

$$x_1=\frac{-7+1}{12}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$$

$$x_2=\frac{-7-1}{12}=\frac{-8}{12}=\frac{-2}{3}$$

$$x_1=\frac{-1}{2} \text{ y } x_2=\frac{-2}{3}$$

Resuelve la ecuación $x^2+15x+56=0$ mediante el método de la fórmula general.

En principio, identificamos los coeficientes de la ecuación: $a=1, b=15, c=56$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general:

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4(1)(56)}}{2(1)}$$ desarrollando: $$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{225-224}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{1}}{2}$$ que de forma respectiva para cada valor no da:

$$x_1=\frac{-15+1}{2}=\frac{-14}{2}=-7 \quad x_2=\frac{-15-1}{2}=\frac{-16}{2}=-8$$

Los valores por ende serán: $x_1=-7, x_2=-8$.

La comprobación de estos valores puede hacerse rápidamente con la simple sustitución de cada uno de los valores encontrados en la ecuación original. Así, para el primer valor:
$x^2+15x+56=0$, sustituyendo: $(-8)^2+15(-8)+56=0$, desarrollando: $64-120+56=0$, finalmente: $120-120=0$, lo cual demuestra que el valor es correcto.

Para practicar:
En parejas encuentren las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

1.- $x^2+15=8x$

2.- $x^2=x+6$

3.- $x^2+6x=-8$

4.- $x^2-2x-15=0$

5.- $4x^2-20x+25=0$

6.- $6x^2+13x-5=0$

7.- $5y^2-2y-3=0$

8.- $x^2-6x+2=0$

9.- $4x^2=-4x-17$

10.- $w^2-5w=0$

Método del uso del discriminante de la fórmula general

El discriminante nos permite conocer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática. Considerando la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, siendo [**a,b,c**] coeficientes reales, el discriminante[78] de dicha ecuación es: b^2-4ac , que como puede observarse es el valor del radical de la fórmula general.

Procedimiento para el cálculo del discriminante y su significado.

Sin resolver la ecuación al evaluar el discriminante podemos ver[79] que podemos tener tres diferentes situaciones en el resultado de este discriminante:,

Sí , $b^2 - 4ac = 0$ en este caso el resultado serán dos raíces reales e iguales.

Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales pero diferentes.

Y por último, $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son imaginarias.

Utilizando el valor del discriminante investigaremos si las raíces son iguales, diferentes, reales o imaginarias, considerando la ecuación cuadrática:

$$y^2 + y + 24 = 0$$

Encontrando los valores numéricos de los coeficientes: a=1, b=1 y c=24 podemos plantear al discriminante como: $b^2 - 4ac$. Sustituyendo los valores tendremos:

$$1^2 - 4(1)(24) = 1 - 96 = -95$$

Como el valor -95<0, las raíces son imaginarias y diferentes. Este resultado no es el valor de las raíces, pero nos indica que si realizamos el cálculo completo de cada raíz, su resultado no será posible de definir al menos como un número real.

Utilizando el valor del discriminante investigaremos si las raíces serán iguales, diferentes, reales o imaginarias, considerando la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 8x - 16 = 0$$

Si definimos los valores de a=1, b=8, c=-16, el discriminante sería $8^2 - 4(1)(-16) = 64 + 64 = 128$ Como 128>0, las raíces de la ecuación son reales y diferentes.

Considerando el discriminante, ¿cómo son las raíces de la siguiente ecuación?:

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

Definiendo el valor de los coeficientes numéricos como: a=1, b=8, c=16, el valor del discriminante será: $8^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$. Como 0=0, las raíces son reales e iguales.

Por último, cabe señalar que el discriminante puede además definir el resultado en el cálculo de la ecuación cuadrática. De esta manera, si el resultado del discriminante es un Cuadrado Perfecto mayor que cero, las raíces serán números racionales y diferentes. Pero si el discriminante es positivo y no tiene la forma de un cuadrado perfecto, el resultado serán dos números irracionales y diferentes.

Para practicar:

En equipos de 4, determinar el tipo de solución que se obtendrá en cada ecuación calculando el discriminante.

1.- $x^2 - 8x + 12 = 0$

2.- $x^2 + 6x + 16 = 0$

3.4 Problemario

I. Para cada una de las siguientes ecuaciones, verificar si el valor sugerido es correcto o incorrecto, comprobarlo haciendo la sustitución.

1. $x+2=6 \quad , \quad x=2$
2. $2x=6 \quad , \quad x=\frac{1}{3}$
3. $22+3y=y \quad , \quad y=-11$
4. $15x+2x=10 \quad , \quad x=\frac{10}{7}$
5. $x+2=30x \quad , \quad x=7$
6. $8=99x-3 \quad , \quad x=1/9$
7. $x2+5x-6x=99 \quad , \quad x=-99$
8. $\frac{3}{4}x+12=-6 \quad , \quad x=-24$
9. $9x+9=\frac{8}{3} \quad , \quad x=\frac{-19}{27}$
10. $62x=\frac{3}{2}x-55 \quad , \quad x=-\frac{10}{11}$
11. $\frac{2x}{\frac{3}{65}}+28=4x \quad , \quad x=-\frac{40}{60},$
12. $\frac{2x}{6}+\frac{x}{2}8+9=4x-6 \quad , \quad x=-45$
13. $\frac{2x-18}{\frac{3}{65}}=4x-8 \quad , \quad x=\frac{3}{5}$
14. $\frac{8-12}{12}=\frac{x}{8-x} \quad , \quad x=4$
15. $\frac{2x}{\frac{8}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{2}=4x \quad , \quad x=-\frac{2}{91}$

II. Para cada una de las siguientes igualdades, calcular el valor de la incógnita y comprobarlas con el valor encontrado.

1. $y+1=6-3y$
2. $2+1=9y$
3. $13y=19+4$
4. $1y+1=\frac{4}{3}$
5. $9=2-31y$
6. $\frac{14}{3}+y=y$
7. $3y=\frac{2y-1}{6}$
8. $\frac{15-33}{99}=y$
9. $\frac{y+1}{2}=\frac{6-3y}{9}$
10. $\frac{15-33}{99}=\frac{3}{5}y$
11. $13=\left(\frac{6-3y}{9}\right)+(44y)$
12. $(13y-15)89=\left(\frac{\frac{14}{3}-y}{7}\right)+(12)$
13. $(y-1-354y)4=(2y)+(6y)$
14. $\left(\frac{13y-15}{24}\right)=\left(\frac{12y}{145y}\right)12$
15. $(13y-15)89=\left(\frac{\frac{14}{3}-y}{7}\right)+(12)$

Para los siguientes sistemas de ecuaciones, encontrar los valores de **x,y** de acuerdo con el método indicado.

III. Método de suma y resta (reducción).

1. $\begin{cases} 3x+6y=6 \\ 10x+3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-8y=6 \\ 1x+2y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 10x+6=2 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} +10x-50y=25 \\ 33x+12y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{3}{5}x+8y=9 \\ 14x+8y=21 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\frac{14}{3}x-14\frac{2}{3}y=4 \\ x-6y=\frac{1}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} 10x+3y=-3 \\ -10x+4y=6 \end{cases}$

IV. Método de sustitución:

1. $\begin{cases} y=1 \\ 4x+y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+10y=7 \\ 9x+13y=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+8y=35 \\ -258x+589y=100 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-50y=6 \\ -14x+y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{2}{5}x+3y=4 \\ -11x+9y=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\frac{21}{4}-2567y=0 \\ +9x-9y=9 \end{cases}$

V. Método de igualación:

1. $\begin{cases} 10x+8y=3 \\ -10x-8y=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x-3y=2 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ -3x+9y=-10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3y+8x=10 \\ +3x+4y=44 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 14x+10y=4 \\ -1\frac{1}{4}x+0y=23 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+6y=13 \\ +9x+10y=4 \end{cases}$

VI. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de eliminación.

1. $\begin{cases} x+2y-2z=15 \\ 4x-y+3z=-5 \\ x+2y-z=14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+3y-2z=4 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2x+5y+3z=31 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+3z=8 \\ 3x+2y-z=-10 \\ x+3y+z=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y-4z=8 \\ x-2y+3z=2 \\ -3x+y-z=-8 \end{cases}$

Calcular el determinante de las siguientes matrices:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} p & -q \\ q & p \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 43 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & \frac{4}{5} \\ 0.2 & 7 & 4 \\ \frac{6}{5} & 9 & -10 \end{vmatrix}$

VIII. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de determinantes:

1. $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 5x+2y-3z=-9 \\ y+z=8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+2y-z=24 \\ y+z=5 \\ 2x+2y-3z=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+4+1z=11 \\ x+3y-1z=1 \\ 2x+6y-4z=-6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-1y+3z=1 \\ -4x+3y-5z=-9 \\ 5x-2z=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-4y+z=0 \\ -8x+2y+z=0 \\ 2x-5y+2z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+21y-0.45z=13 \\ 6x+4/3\,y-z=-9 \\ \frac{1}{2}x+10y-99z=0 \end{cases}$

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas de acuerdo al método sugerido.

IX. Por factorización:

1. $x^2-11x+30=0$
2. $x^2-x-6=0$
3. $x^2+x-12=0$
4. $x^2-2x-3=0$
5. $x^2-x-20=0$

X. Completando el trinomio cuadrado perfecto:

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$
2. $x^2 + 6x - 7 = 0$
3. $x^2 + 10x + 9 = 0$
4. $2x^2 + 5x - 12 = 0$
5. $8x^2 - 2x - 3 = 0$

XI. Utilizando la Fórmula General:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $-x^2 + 7x - 10 = 0$
3. $2x^2 - 14x + 24 = 0$
4. $7x^2 + 21x - 28 = 0$
5. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
6. $10x^2 - 6x + 8 = 0$
7. $x^2 + 6x + 18 = 0$

XII. Calcula el valor del discriminante y determina si las raíces de la ecuación cuadrática son reales diferentes o iguales, o imaginarias diferentes:

1. $x^2 - 11x + 30 = 0$

2. $x^2 - 3x + 2 = 0$

3. $x^2 - 2x - 63 = 0$

4. $4x^2 + 8x + 4 = 0$

5. $3x^2 + x + 4 = 0$

3.5 Soluciones del problemario

I.

1. $x+2=6$, $x=2$. Correcta.
2. $2x=6$, $x=\frac{1}{3}$ Incorrecta, correcta: x=3
3. $22+3y=y$, $y=-11$Correcta.
4. $15x+2x=10$, $x=\frac{10}{7}$. Correcta
5. $x+2=30x$, $x=7$ Incorrecta, correcta: x=2/29
6. $8=99x-3$, $x=1/9$ Correcta
7. $x2+5x-6x=99$, $x=-99$ Incorrecta, x=99
8. $\frac{3}{4}x+12=-6$, $x=-24$ Correcta.
9. $9x+9=\frac{8}{3}$, $x=\frac{-19}{27}$ Correcta.
10. $62x=\frac{3}{2}x-55$, $x=-\frac{10}{11}$ Correcta.
11. $\frac{\frac{2x}{3}}{65}+28=4x$, $x=-\frac{40}{60}$ Incorrecta, correcta: x=–42/59
12. $\frac{2x}{6}+\frac{x}{2}8+9=4x-6$, $x=-45$ Correcta
13. $\frac{\frac{2x-18}{3}}{65}=4x-8$, $x=\frac{3}{5}$ Correcta
14. $\frac{8-12}{12}=\frac{x}{8-x}$, $x=4$ Incorrecta, correcta: x=-4
15. $\frac{\frac{2x}{8}}{3}+\frac{\frac{1}{7}}{2}=4x$, $x=-\frac{2}{91}$ Incorrecta, correcta: x=2/91

Errata punto 4. x=10/17

II.

1. $y = \frac{5}{4}$
2. $y = \frac{1}{3}$
3. $y = \frac{23}{13}$
4. $y = \frac{1}{3}$
5. $y = -\frac{7}{31}$
6. Sin solución
7. $y = \frac{1}{16}$
8. $y = \frac{4}{33}$
9. $y = \frac{1}{5}$
10. $y = -\frac{10}{33}$
11. $y = \frac{37}{131}$
12. $y = \frac{28301}{24300}$
13. $y = -\frac{1}{355}$
14. $y = \frac{5631}{1885}$
15. $y = \frac{28301}{24300}$

Errata punto 7. y=-1/16

Errata punto 8. y=-6/33

III.

1. $x=-\frac{2}{17}, y=\frac{18}{17}$

2. $x=2, y=0$

3. $x=-\frac{2}{5}, y=\frac{58}{25}$

4. $x=\frac{65}{177}, y=-\frac{151}{354}$

5. $x=\frac{60}{67}, y=\frac{567}{536}$

6. $x=-\frac{47}{84}, y=-\frac{25}{168}$

7. $x=-\frac{3}{7}, y=\frac{3}{7}$

IV.

1. $x=1, y=1$

2. $x=-\frac{51}{38}, y=\frac{47}{38}$

3. $x=\frac{6605}{1277}, y=\frac{3110}{1277}$

4. $x=-\frac{356}{699}, y=-\frac{91}{699}$

5. $x=\frac{50}{61}, y=\frac{224}{183}$

6. $x=\frac{10247}{10268}, y=\frac{-21}{10268}$

V.

Errata 4. x=-4, y=14

1. Sin solución.

2. $x=\frac{13}{24}, y=\frac{41}{36}$

3. $x=\frac{2}{3}, y=-\frac{8}{9}$

4. $x=26, y=-\frac{17}{2}$

5. $x=92, y=-\frac{642}{5}$

6. $x=-\frac{53}{7}, y=\frac{101}{14}$

VI.

1. $x=1, \quad y=6, \quad z=-1$

2. $x=2, \quad y=2, \quad z=2$

3. $x=2, \quad y=4, \quad z=5$

4. $x=-5, \quad y=4, \quad z=3$

5. $x=\frac{13}{5}, \quad y=-\frac{6}{5}, \quad z=-1$

Errata del inciso VII. Punto 5. -127

Errata del inciso VIII. Punto 3. x=1/2, y=3/2, z=4

VII.

1. 2

2. $p^2 + q^2$

3. 172

4. -273

5. -175

6. 320

7. $\frac{5678}{25}$

VIII.

1. $x=2, \quad y=1, \quad z=7$

2. $x=\frac{88}{19}, \quad y=\frac{37}{19}, \quad z=\frac{58}{19}$

3. $x=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{7}{6} \quad z=4$

4. $x=\frac{1}{6}, \quad y=-\frac{65}{12}, \quad z=-\frac{19}{12}$

5. Sin solución

6. $x=-\frac{202565}{119488} \simeq -1.69 \quad y=\frac{451099}{477952} \simeq .94 \quad z=\frac{31105}{358464} \simeq .086$

IX.

1. $x_1 = 5, x_2 = 6$

2. $x_1 = -2, x_2 = 3$

3. $x_1 = -4, x_2 = 3$

4. $x_1 = -1, x_2 = 3$

5. $x_1 - 4, x_2 = 5$

X.

1. $x_1 = -3, x_2 = -1$

2. $x_1 = -7, x_2 = 1$

3. $x_1 = -9, x_2 = -1$

4. $x_1 = -4, x_2 = \frac{3}{2}$

5. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$

Errata inciso X. Punto 5. x_1=1/2, x_2=3/4

XI.

1. $x_1 = 2, x_2 = 3$
2. $x_1 = 2, x_2 = 5$
3. $x_1 = 3, x_2 = 4$
4. $x_1 = -4, x_2 = 1$
5. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$
6. Sin solución
7. Sin solución

XII.

1. Reales, desiguales.
2. Reales, desiguales.
3. Reales, desiguales.
4. Reales, iguales.
5. Imaginarias, desiguales

3.6 Conclusiones

Las manipulaciones numéricas que se han realizado por parte de la humanidad a lo largo de su historia han venido desarrollando reglas para hacer esas manipulaciones de forma eficiente. Dichas reglas se han formalizado mediante propiedades y postulados de la igualdad entre los números reales. De hecho, utilizamos casi sin notarlo muchos de estos postulados en nuestras operaciones aritméticas diarias. Así, realizar sumas y restas entre otras de las operaciones, nos lleva a generalizar propiedades numéricas incluso en aplicaciones concretas de la generalización de estas propiedades en lo que hemos llamado álgebra; pero el álgebra no es solo la manipulación de símbolos que lleguen a tener significados, sino que estos símbolos cuando tienen relación entre ellos, además de significado, tienen aplicaciones en gran parte de nuestra vida diaria. La manipulación de expresiones y ecuaciones algebraicas vistas en este apartado son un principio para un maravilloso futuro de análisis de funciones. Hasta ahora vistas y tratadas como ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas y ecuaciones de primero y segundo grado, las aplicaciones de las mismas se asoman al final con algunos ejemplos y seguramente nos llevarán a interpretaciones de fenómenos diarios en donde hemos comenzado a ver a las matemáticas y sus aplicaciones como una herramienta de aplicaciones directas y prácticas. El futuro en nuestros estudios de las matemáticas es no solo prometedor, sino además maravilloso.

Unidad 4. Logaritmos

$\lim_{x \to \pm\infty} (\frac{1}{x}) = 0$ El cero maya

4. Sucesiones y series

Las sucesiones son listas de términos de un conjunto en un cierto orden infinito. Es una sucesión de progresión aritmética si cada diferencia entre términos es una constante. Es una sucesión geométrica si cada término se calcula multiplicando al anterior por un número fijo o factor de **n**. Las series y sucesiones pueden parecer la misma cosa, pero las series son la suma o multiplicación de una sucesión empleando los símbolos Σ y Π .

4.1 Sucesiones

Una secuencia o sucesión es una lista infinita de números o conjuntos que se pueden ordenar como un índice: primero, segundo, tercero…; tal como:

3,6,9,11,14…,

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

1,0,1,0,1,0…,

Cada elemento de la secuencia se le llama término. Un término general de una sucesión es puesto con el subíndice **n**. El análisis de las propiedades de una sucesión es descubrir la relación entre cada término de la secuencia: de esta manera una lista simple puede ser representada de forma general. En primer lugar, la lista tiene una coma entre cada término de la secuencia. En segundo lugar, la lista termina con puntos suspensivos "…"; este es un signo que indica sucesivamente hasta infinito. Una sucesión o secuencia siempre termina con "…" puesto que es una lista infinita. La lista solo es infinita en una sola dirección, positiva o negativa. Una lista siempre tiene un primer elemento.

Las sucesiones de números generalmente siguen patrones obvios, aunque muchas veces no son muy fáciles de identificar. Una secuencia se intenta expresar con una fórmula que sintetice la lista.
Por ejemplo:
2,4,8,10,12,14…,

Podría ser representada por:
$a_n = 2n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Para abreviar podemos expresar la secuencia como **2n**

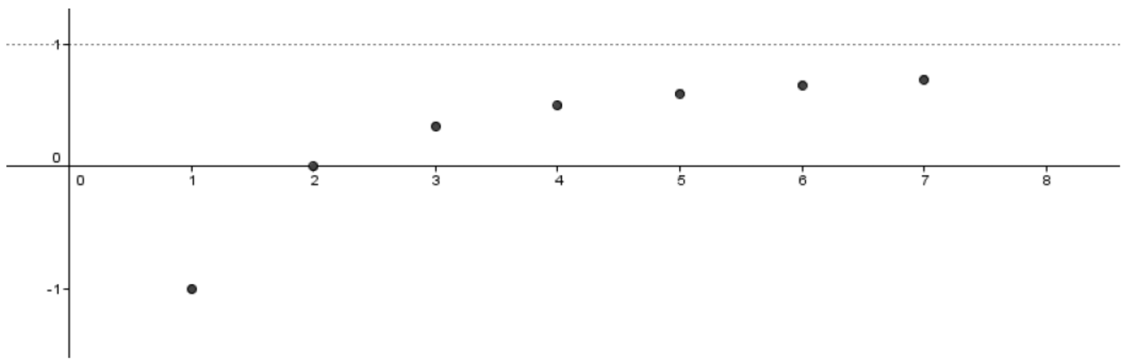
Otro caso, tenga la secuencia $\dfrac{1}{3^{n-1}}$ donde **n** tiende a infinito.

La secuencia 1,0,1,0,1,0…, puede ser expresada:

$$x_n = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; es\ par \\ 0 \;\; si \;\; es\ impar \end{cases}$$

Esta es una secuencia, aunque podríamos pensar en dos listas.

Las fórmulas son útiles porque dan expresiones abreviadas para secuencias de todo tipo. Traducir listas en fórmulas es algo importante para una representación perfecta de una lista infinita. Las secuencias pueden ser representadas gráficamente como un espacio de puntos.



Es conveniente usar puntos en lugar de curvas para gráficos de sucesiones porque cada secuencia está definida solo para valores de números explícitamente donde interviene **n**.

Los gráficos son útiles para asociar una lista con el concepto matemático de función, una secuencia técnicamente es una función de números reales.

Propiedades de secuencias

Las diferentes representaciones de secuencias nos advierten de algunas propiedades. La secuencia puede ser creciente o decreciente, limitada o convergente.

Una sucesión (a_n) es **monótona creciente** si para todo n≥1 se verifica que $a_n \leq a_n + 1$, es decir, cada término es menor o igual que el siguiente.

Una sucesión (a_n) es **monótona decreciente** si para todo n≥1 se verifica que $a_n \geq a_n + 1$, es decir, cada término es mayor o igual que el siguiente.
Si las desigualdades son estrictas se dice que las sucesiones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes.

Por ejemplo, la sucesión (a_n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12…, es estrictamente creciente y la sucesión.

(a_n)=12, 9, 6, 3, 0, -3…, es estrictamente decreciente.

La sucesión (a_n)=1, -2, 3, -4, 5, -6…, no es monótona creciente ni decreciente.

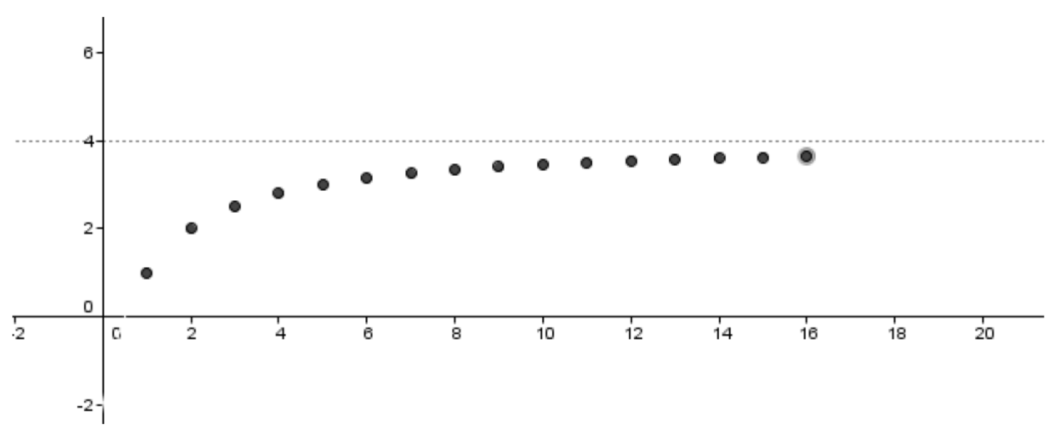
Una sucesión (a_n) está **acotada superiormente** si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo **n**. Decimos que el número M es una cota superior de la sucesión.

Una sucesión (a_n) está **acotada inferiormente** si existe un número real M tal que $a_n \geq M$ para todo **n**. Decimos que el número M es una cota inferior de la sucesión.

Una sucesión (a_n) está acotada si lo está **superior e inferiormente**. En este caso, existe un número real M tal que $|a_n| \geq M$ para todo **n**.

Una secuencia a_n es convergente a un **límite a** si y solo si, va lo suficientemente lejos a lo largo de una secuencia, nosotros podemos ver que a_n se cierra a un número **a**.
Por ejemplo, para la secuencia:

$$a_n = \frac{4n-2}{n+1}$$



A medida que aumenta el valor de **n**, los valores de a_n se aproximan cada vez más a 4.

Decimos que 4 es el límite de la sucesión (a_n) y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{4n-2}{n+1} = 4$$

Observación: El límite **L** de una sucesión (si existe) es único.

Una sucesión es **convergente** si tiene como límite un número real, y será **divergente** si tiene como límite +∞ o -∞.

Cualquier sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite, que es la menor de sus cotas superiores. Del mismo modo, cualquier sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente tiene límite, que es la mayor de sus cotas inferiores.

El número "e"

Consideremos la sucesión de término general:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sus primeros términos son:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots, \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, \ldots$$

Realizando esos cálculos obtenemos:

2; 2,25; 2,37037...; 2,441406...; ...; 2,70481...

Se trata de una sucesión creciente y acotada superiormente, porque todos los términos son menores que 3.

Como vemos, los términos muy avanzados se aproximan al mismo número, el número **e**. Por tanto, se define el número **e** como:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

4.2 Series

Las expresiones de series infinitas se utilizan con frecuencia en matemáticas en apoyo a la ingeniería y a las ciencias, particularmente en la solución de problemas que no pueden encontrar una solución exacta o de forma cerrada. Las series infinitas son métodos que se emplean para resolver integrales, ecuaciones diferenciales y ecuaciones con derivadas parciales. Muchas funciones elementales pueden ser representadas como una serie infinita.

A la suma infinita de grandes números, de **n** números $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, ..., a_n$; es decir, $a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + ... + a_n$
la podemos expresar como una serie:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

Donde **i** es el índice de la suma, a_i es el **i**-ésimo término de la suma y los límites superior e inferior de la suma **n** y 1.

El símbolo Σ se le llama signo de sumatoria y es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$\sum_{k=1}^{7}k^3=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3$$
$$\sum_{n=2}^{5}\frac{n+1}{n-1}=\frac{3}{1}+\frac{4}{2}+\frac{5}{3}+\frac{6}{4}+\frac{7}{5}$$
$$\sum_{i=1}^{5}f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)$$

Propiedad de linealidad

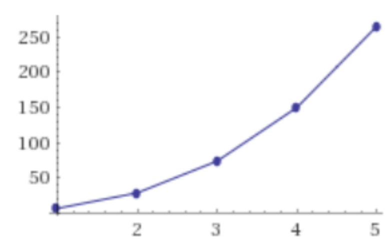
1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c\bullet a_i=\ c\sum_{i=1}^{n}a_i$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\pm\sum_{i=1}^{n}b_i$

Ejemplo: Determine el valor de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{5}(4i^2+3i)$$

$$\sum_{i=1}^{5}4i^2+\sum_{i=1}^{5}3i=220+45=265$$



$$\sum_{i=1}^{5}(4\,i^2+3\,i)=265$$

Algunas sumas notables:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = n(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Si la sucesión de sumas parciales S_n tal que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es converge a un número real **S**, diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a **S**. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$$

El número **S** es llamado suma o punto de convergencia de la serie.

Por ejemplo, calcúlese la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Entonces:

$$S_n = \frac{1}{1\bullet 2} + \frac{1}{2\bullet 3} + \frac{1}{3\bullet 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cancelamos los términos simétricos:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Luego por definición:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Es decir, la serie converge en 1.

Caso opuesto si la serie diverge S_n :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

no existe o diremos que es divergente.

4.2.1 Serie armónica

La serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Se le llama armónica y como veremos es divergente:

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Sumamos los miembros:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \ldots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

De otra forma de verlo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}(+\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\geq (+\infty)$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

4.2.2 Serie geométrica

Una serie geométrica es construida a partir de los términos de una secuencia geométrica y se escribe como:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+\ldots+ar^n+\ldots$$

Es una serie de razón **r** y coeficiente **a**.

$Si|r|\geq 1,$ la serie diverge.

$Si|r|<1,$ la serie converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+\ldots+ar^n+\ldots=\frac{a}{1-r}$$

Por ejemplo, calcule el valor de:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$$

$$S=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\ldots$$

En esta serie **a=1**y **r=1/3**

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

Otro ejemplo, halle la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2^n}$$

La serie es geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{2} < 1$$

Por lo tanto, es convergente y el término inicial **a=3**.

Así que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Podemos decir que converge en 6.

Otro ejemplo, analice la convergencia de:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3n}}{7^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2^3\right)^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^n$$

Se observa una serie geométrica con razón (8/7)<1.

Es claro que la serie diverge.

Un ejemplo clásico es cuando la serie geométrica es negativa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

r=1/4

por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

La suma de la serie converge en 4/5.

Otro ejemplo ilustrativo son los casos de sumas de series:

$$\sum_{n=o}^{+\infty} \left(2^{-n} + 3^{-n}\right)^2$$

Desarrollando el cuadrado:

$$\sum_{n=o}^{+\infty}\left(2^{-n}+3^{-n}\right)^2$$
$$\sum_{n=o}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$$
$$\sum_{n=o}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+2\left(\frac{1}{6}\right)^{n}+\left(\frac{1}{9}\right)^{n}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}$$

Cada una son series geométricas convergentes de:

$$r=\frac{1}{4}$$
$$r=\frac{1}{6}$$
$$r=\frac{1}{9}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right)+\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{583}{120}$$

4.2.3 Serie aritmético-geométrica

Esta serie son del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+\ldots$$

a_i y b_i están en progresión aritmética a razón de r:

$|r|<1$

Es una serie convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r} + \frac{b_1 r d}{(1-r)^2}$$

d es una razón de la progresión aritmética y **r** de la progresión geométrica.

Por ejemplo, calcule el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^{n-1}}$$

Se transforma la expresión en:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)(\frac{1}{3})^{n-1}$$

El término (2n-1) corresponde a progresión aritmética, con:

$$a_1 = 1$$
$$d = 2$$

El término $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ es una progresión geométrica.

$$b_1 = 1$$
$$r = \frac{1}{3} < 1$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r} + \frac{b_1 r d}{(1-r)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)(\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$= \frac{a_1 b_1}{1-r} + \frac{b_1 r d}{(1-r)^2} = \frac{1 \cdot 1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 3$$

4.3 Logaritmos y e

El gran matemático Euler[80], llamado por Laplace como "El maestro de todos nosotros[81]", es quien introduce el término función en el vocabulario matemático, pareciéndose al concepto de fórmula, término relacionado con variables y constantes. La definición moderna se le atribuye al alemán Peter Dirichlet[82] quien introduce el concepto de función como una expresión, una regla o ley que define una relación entre una variable (variable independiente) y otra variable (variable dependiente).

Si observamos a nuestro alrededor, y tratamos de definir lo que ocurre, podríamos hacerlo en términos matemáticos, tal vez queda definido mediante los siguientes axiomas:

a) Todo evento en la naturaleza puede ser representado mediante ecuaciones o funciones y viceversa, toda ecuación o función puede ser la representación de algún evento en la naturaleza.

b) Todo evento en la naturaleza tiene patrones.

Desde la antigüedad el hombre ha intentado buscar estas relaciones; comenzó colocando marcas en relación con el número de años o de animales que poseía. Herón de Alejandría en el siglo II D.C. encontró una fórmula que calcula el área de un triángulo en función de sus lados. Tratando de no malinterpretar a Platón[83] podría decirse que llegó a la conclusión de que los números son el lenguaje para expresar las ideas, tal vez aventurándonos pero sin poder afirmarlo podríamos pensar que ya tenía una noción de lo que es una función, de la misma forma se podría afirmar que los mayas, egipcios[84] o chinos entre otras civilizaciones ya manejaban el concepto o solamente uno cercano a él, el de relación.

Galileo[85] al relacionar el movimiento de los cuerpos celestes en función de su posición, pretendió relacionar los conceptos, formulando leyes, así dio un gran paso hacia la concepción de lo que es una función. Poco después de Galileo, Descartes muestra la relación que existe entre una gráfica y una ecuación y viceversa. Sin embargo, la definición de función se ha ido modificando con el tiempo, desde la construcción de tablas de raíces y potencias hasta como se emplea ahora. Se considera que Leibniz introduce este término, seguido por Bernoulli[86] quien en septiembre de 1694 escribe una carta en respuesta a Leibniz; lo que describe como función en el sentido más actual:

> …una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes[87]…

En 1748 el concepto de función tomó énfasis gracias a la publicación "Introduction in analysin infinitorum" de Euler donde define función como:

> "…una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta, como cualquiera que lo sea de dicha cantidad y de números o cantidades constantes[88]…"

Así se da el crédito a Euler de precisar el concepto de función y del estudio de funciones elementales. Sin embargo, es Peter Dirichlet quien introduce el concepto moderno de función.

En este capítulo se presentan dos funciones de gran importancia, la **función exponencial** y la **función logarítmica**, que son empleadas para modelar observaciones, por ejemplo, la memoria humana[89], virus de computadora, análisis de datos: meteorología, datación por carbono, puntajes del IQ, ciencia forense e interés compuesto. De forma exponencial crecen las bacterias en un cultivo, entre muchas otras aplicaciones.

John Napier matemático escocés, en 1614 fue el primero que acuño el concepto matemático de Logaritmo[90]. Al logaritmo neperiano de base **e**, es llamado en honor a Napier. Henry Briggs es quien introduce la base 10 a los logaritmos.

El número exponencial **e** nos sirve para observar que tan rápido crecen la cosas, a menudo llamado crecimiento exponencial (es un número irracional). ¿Qué tan rápido es esto?

e= 2.718281828459045235360287471352662497757247093699...

El símbolo **e** fue introducido por primera vez para este número por Leonhard Euler en un artículo inédito del año 1727. Al igual que con pi, se han ideado varios métodos para tener presente los primeros dígitos de **e**. Por ejemplo al contar las letras de la sentencia:

In Glasgow I lectured on geometry. (2.71828)

Veamos qué tan rápido pueden crecer varias secuencias. Una forma simple de crecimiento es el tipo lineal, ilustrado por la secuencia de contenido uno a uno de números naturales 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18…; nos referimos a la secuencia para su enésimo término **n**.

Algo más rápido es el crecimiento cuadrático que implica los cuadrados de n^2.

n	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Aún más rápido resulta crecimiento cúbico, n^3.

n	n^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

Todos estos son crecimientos polinomio, ya que implican potencias de **n**. Un crecimiento más rápido es el exponencial, donde la base es un número y **n** el exponencial. Por ejemplo: 3^n.

n	3^n
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049

Esta distinción entre crecimiento polinomio y exponencial la reconoció Thomas Malthus en el año 1798[91]. Su razonamiento fue que un crecimiento lineal del alimento y un exponencial de población, provocaría escasez de alimentos. De las secuencias de números anteriores, esta claro que el crecimiento exponencial es mayor que el polinomio. En procesos de control de respuesta un crecimiento polinomio es menos eficaz en su respuesta que un exponencial.

El número exponencial **e** está íntimamente ligado a los logaritmos, así que antes de ir más allá vamos a profundizar un poco en su naturaleza. Las primeras ideas de logaritmos (la palabra significa razón numérica de cambio), aparecieron alrededor del año 1500, cuando Nicolas Chuquet y Stifel explicaron cómo convertir ciertos cálculos que implican multiplicación y división en otros más simples que implican suma y resta.

Para ilustrar esto nos apoyaremos en la secuencia de 2^n.

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16 384
15	32 768

Se observó que para multiplicar potencias de 2, añadimos sus exponentes. Por ejemplo, multiplicar 16 por 128, $16=2^4$ y $128=2^7$ nosotros escribimos:

$$16x128 = 2^4 x 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11} = 2048$$

Ahora presentamos a los logaritmos, para $x = 2^n$ vamos escribir

$\log_2 x = n$

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$

$\log_2 2048 = \log_2 2^{11} = 11$

y

$$\log_2(16x128) = \log_2 2048 = 11 = 4+7 = \log_2 16 + \log_2 128$$

Estos cálculos ilustran la regla general de que el logaritmo de un producto es suma de los logaritmos separados, es decir:

$$\log_2(a \times b) = \log_2 a + \log_2 b$$

Hasta ahora hemos definido estos logaritmos para potencias de 2, definiendo distintos números enteros para **n**. Ahora manejaremos **n** no entero.

$$\log_2 3 = 1.5849625007211561814537389439478165087598144076 92\ldots$$
$$\frac{\log 3}{\log 2}$$
$$\log_2 5 = 2.3219280948873623478703194294893901758648313930 24\ldots$$
$$\frac{\log 5}{\log 2}$$

Por lo general, para multiplicar **a** x **b** o más números, buscamos sus logaritmos, sumamos , y luego localizamos el número cuyo logaritmo es su suma.

$$\log_2(a \times b) = \log_2 a + \log_2 b$$

Para la división podemos anotar un enfoque similar. Para dividir potencias de 2, restamos sus exponentes. Por ejemplo:

$$4096 \div 512 = 2^{12} \div 2^{9} = 2^{12-9} = 2^{3} = 8$$

Con logaritmos:

$$\log_2(4096 \div 512) = \log_2 8 = 3 = 12 - 9 = \log_2 4096 - \log_2 512$$

En general la división de logaritmos:

$$\log_2(a \div b) = \log_2 a - \log_2 b$$

Así que para dividir dos números buscamos sus logaritmos, restamos y luego localizamos el valor cuyo logaritmo es su diferencia. Toda esta explicación la hemos hecho con logaritmos de base 2 o también llamada potencia 2. Para otros logaritmos de cualquier base **n**:

$$\log_n(a \div b) = \log_n a - \log_n b$$
$$\log_n(a \times b) = \log_n a + \log_n b$$

En una visita Henry Briggs a Napier, cuando se conocieron, el resultado fue que Briggs comenzó a construir "Logaritmos de base 10" en los que:

$$\log_{10} 1 = 0; \log_{10} 10 = 1; \log_{10} 100 = 2$$
$$si$$
$$x = 10^n, entonces \quad \log_{10} x = n$$

Encontró que:

$$\sqrt{10} = 10^{1/2} = 3.162...$$
$$\log_{10} \sqrt{10} = 0.5 = \frac{1}{2}$$

Y de nuevo cumplieron con las propiedades:

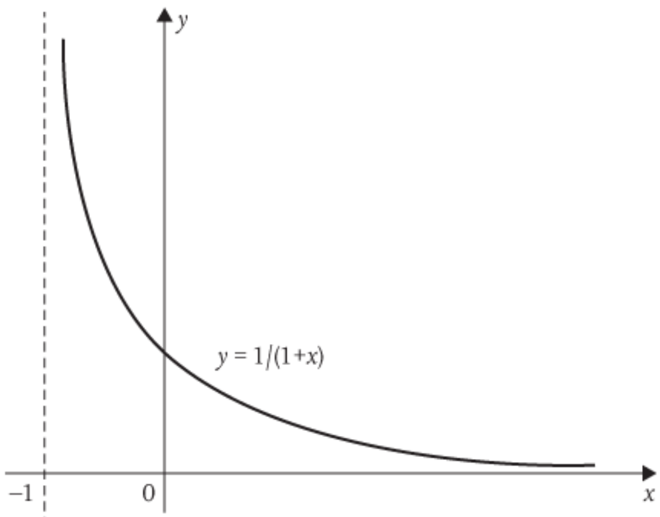
$$\log_{10}(a \div b) = \log_{10} a - \log_{10} b$$
$$\log_{10}(a \times b) = \log_{10} a + \log_{10} b$$

En la década de los años 1630 se crearon una serie de instrumentos mecánicos basados en escalas logarítmicas. Diseñados para ser utilizados en cálculos complicados, particularmente por astrónomos y navegantes, estos incluyeron reglas de deslizantes durante 300 años, hasta la aparición de las calculadoras electrónicas de bolsillo en 1970.

Los logaritmos fueron reconocidos rápidamente como de inmenso valor para aquellos científicos e ingenieros que necesitaban hacer cálculos extensos. Es decir con grandes números, fueron manejados en su representación más simple de logaritmos y ello implico el cálculo.

En la década de 1660 Nicolaus Mercator, independientemente de Newton y James Gregory, estaba investigando el área de bajo de la hipérbola

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)$$



En el análisis comenzaremos por:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)=\left(1+x\right)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-...,$$

$$\left(1+x\right)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-...,$$

Se puede verificar multiplicando ambos lados por 1+x y notando que la mayoría de los términos se cancelan, dejando solo 1, o sumando la serie geométrica a la derecha. A continuación se integró esta serie infinita término a término entre 0 y 1, utilizando el hecho de que la integral de:

$$x^k \;\; es \;\; x^{k+1}\big/(k+1)$$

Para cada número k, y se obtiene una nueva serie.

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-...$$

Esta serie apareció para log(1+x) escrita en 1668 dada por Mercator, pero Newton ya la conocía, pero este último no se había molestado en publicarla. Es válida para todos los valores de x entre -1 y 1, y también para x=-1 cuando da:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Estos son "logaritmos de base e" pero en este momento no se especificó. En 1683 el matemático suizo Jakob Bernoulli se preocupó por los problemas de cálculo de interés. Dada una suma de dinero para invertir de tasas de interés determinada durante varios años ¿qué tan rápido crecerá? La respuesta depende de si usamos intereses simples o compuestos y de la frecuencia con que se calculan los intereses. Bernoulli quería averiguar qué pasaría si calculamos los intereses con más frecuencia, digamos n veces al año o incluso de forma continua.

Lo que hacemos para obtener los resultados es tener en cuenta que si el año se divide en **n** períodos, después de cada período la cantidad se multiplica por 1+(1/n), por lo que la cantidad final es:

$$\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^{n}$$

Observamos que, a medida que **n** aumenta indefinidamente, estos números tienden a un valor limitante que corresponde a cuando el interés se calcula continuamente. Este valor limitante, Euler lo llamó **e**. Es una constante matemática **e**, un número irracional y será llamado a ser la base de los logaritmos naturales ln.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^{n}$$

El número **e** se define como un proceso de límite, el cual Euler lo expresa en una serie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^{n} = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\bullet 2} + \frac{1}{1\bullet 2\bullet 3} + \ldots$$

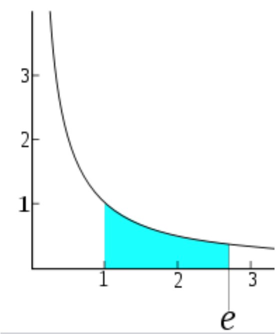
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En forma integral:

$$\int_{1}^{x} \frac{dt}{t} = 1$$

$$\int_{1}^{e} \frac{dt}{t} = 1$$



El área entre el eje *x* y la gráfica *y* = 1/*x*, entre *x* = 1 y *x* = *e* es 1.

Así que **e** a la potencia 1:

$$e^{1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Si **e** se eleva a la **x** potencia:

$$e^{x} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + {}^{x}\!/_{n}\right)^{n}$$

La mayoría de los avances en la comprensión de los logaritmos, la función exponencial y sus conexiones, se hicieron a principios del siglo XVIII. La figura principal de esta historia fue Leonhard Euler, quien investigó las principales propiedades del número exponencial **e** y la $f(x) = e^{x}$. Para **e** como límite.

Hemos visto que **e** es el límite de los números a medida que **n** aumenta indefinidamente, y que $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ es el límite de $(1+x/n)^{n}$ para cualquier número **x**. Donde entonces e es una serie infinita:

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Para cualquier potencia **x** elevado **e**:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

Esta serie converge para todos los valores de **x**. De hecho converge por que los valores aumentan muy rápidamente. En síntesis:

$$x = 2^n$$
$$n = \log_2 x$$
$$x = e^n$$
$$n = \log_e x$$
$$e^y e^x = e^{y+x}$$

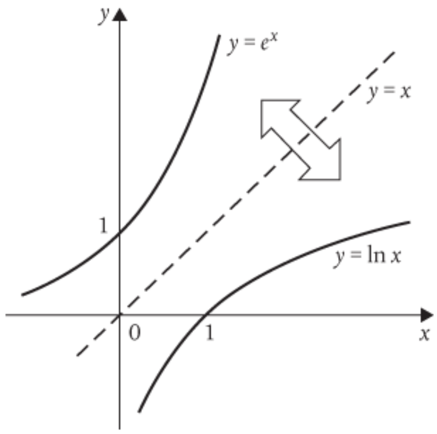
La relación de funciones:

$$y = e^x$$
$$y = \log_e x$$
$$\therefore$$
$$e^{\log_e x} = x$$

Esta relación inversa entre **e** y **log** fue observada por John Wallis en 1685 y desarrollada por Euler, quien en 1748 simplificó $\log_e x$ por:

$$\log_e x = In(x)$$
$$y = e^x$$
$$y = In(y)$$

A partir de aquí se le llama logaritmo natural a ln.



Podemos usar esta relación inversa para mostrar que para la regla de multiplicación de exponentes y para la regla básica de los logaritmos son esencialmente los mismos resultados.

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a(u^n) = n \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u$

Por ejemplo:

De forma general	Ejemplo
$log_a b + log_a c = log_a bc$	$log_2 8 + log_2 2 = log_2 16$
$log_a b - log_a c = log_a\left(\frac{b}{c}\right)$	$log_2 5 - log_2 3 = log_2\left(\frac{5}{3}\right)$
$log_a(b^c) = c \cdot log_a b$	$log_2(6^5) = 5 \cdot log_2 6$
$log_a a = 1$ $log_a 1 = 0$	$log_2 2 = 1$ $log_3 1 = 0$
$log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a x$	$log_2\left(\frac{1}{3}\right) = -log_2 3$
$log_a x = \frac{log\ x}{log\ a} = \frac{ln\ x}{ln\ a}$	$log_2 5 = \frac{log\ 5}{log\ 2} = 2.322$
$a^{log_a x} = x$	$10^{log_{10} 16} = 16$

El **logaritmo neperiano**:

$$NapLog(x) = \frac{\log(\frac{10^7}{x})}{\log(\frac{10^7}{10^7 - 1})}$$

Es un cociente de logaritmos y no propiamente un logaritmo distinto en términos modernos.

Y finalmente el logaritmo de base 10 que ya hemos empleado, es también llamado **logaritmo decimal**.

Referencias

[1] Vinogradov, I. M. (2016). *Elements of number theory*. Courier Dover Publications.

[2] Einstein, A., & Engel, A. (1987). *The collected papers of Albert Einstein* (7). Princeton University Press.

[3] Pagano, S., Lombardi, L., & Mazza, V. (2014). Brain dynamics of attention and working memory engagement in subitizing. *Brain Research*, *1543*, 244-252.

[4] Menary, R. (2015). Mathematical cognition: A case of enculturation. Retrieved from https://philarchive.org/archive/MENMCA-2

[5] Revkin, S. K., Piazza, M., Izard, V., Cohen, L., & Dehaene, S. (2008). Does subitizing reflect numerical estimation. *Psychological science*, *19*(6), 607-614.

[6] Maloney, E. A., Risko, E. F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Mathematics anxiety affects counting but not subitizing during visual enumeration. *Cognition*, *114*(2), 293-297.

[7] Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, *121*(1), 147-153.

[8] Maloney, E. A., Risko, E. F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Mathematics anxiety affects counting but not subitizing during visual enumeration. *Cognition*, *114*(2), 293-297.

[9] Baddeley, A. (2001). The magic number and the episodic buffer. *Behavioral and Brain Sciences*, *24*(1), 117-118.

[10] Shimomura, T., & Kumada, T. (2011). Spatial working memory load affects counting but not subitizing in enumeration. *Attention, Perception, & Psychophysics*, *73*(6), 1694-1709.

[11] Braconier, H., & Ruiz-Valenzuela, J. (2014). Gross earning inequalities in OECD countries and major non-member economies.

[12] Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological review*, *89*(4), 369.

[13] Domingos, A., & de Lisboa, N. APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS AVANÇADOS: O CONCEITO DE DERIVADA.

[14] Gaber, D., & Schlimm, D. (2015). Basic mathematical cognition. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, *6*(4), 355-369.

[15] Núñez, R. E., & Sweetser, E. (2006). With the future behind them: Convergent evidence from Aymara language and gesture in the crosslinguistic comparison of spatial construals of time. *Cognitive science*, *30*(3), 401-450. doi:10.1207/s15516709cog0000_62

[16] Boroditsky, L., & Gaby, A. (2010). Remembrances of times East: absolute spatial

representations of time in an Australian aboriginal community. *Psychological Science*, *21*(11), 1635-1639.

[17] Bluedorn, A. C., & Standifer, R. L. (2006). Time and the temporal imagination. *Academy of Management Learning & Education*, *5*(2), 196-206.

[18] Meredith, M. (2011). *The fate of Africa: A history of the continent since independence*. Hachette UK.

[19] Carl Zimmer (2018) *Neanderthals, the World's First Misunderstood.* The New York Times.

[20] Herrmann, E., Hare, B., Call, J., & Tomasello, M. (2010). Differences in the cognitive skills of bonobos and chimpanzees. *PloS one*, *5*(8), e12438.

[21] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669802001191

[22] https://cage.ugent.be/geometry/Theses/19/ekuijken.pdf

[23] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316582900061

[24] Ehrig, H., & Mahr, B. (1985). *Fundamentals of Algebraic Specification 1: Equations and Initial Semantics (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)* (Softcover reprint of the original 1st ed. 1985 ed.). Springer.

[25] Ehrig, H., Ehrig, K., Prange, U., & Taentzer, G. (2009). *Fundamentals of Algebraic Graph Transformation (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)* (Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2006 ed.). Springer.

[26] Stevin, S., Alexandria, D. O., & Girard, A. (2013). *L'Arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges - Primary Source Edition (French Edition)*. Nabu Press.

[27] H*ORMANN, J. O. S. E. (1956). UEBER JACOB BERNOULLIS BEITRAGE ZUR INFINITESIMALMATHEMATIK (MONOGRAPHIES DE L'ENSEIGNMENT MATHEMATIQUE NO. 3). INSTITUT DE MATHEMATIQUES; UNIVERSITE, GENEVE.*

[28] Teresa Lucca, Ana M. (2013). Blog de matemáticas y TIC'S.

[29] Penrose Roger (2007). *El camino a la realidad*. Barcelona: DEBATE.

[30] Conway, J. H. & Guy, R. K. (1996). *Euler's Wonderful Relation*. The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag.

[31] Eliseo Martínez H., Héctor Varela V., Proyecto "Web en apoyo al estudio de las matemáticas", Universidad de Antofagasta**.** *Introducción al álgebra para los estudiantes de primero medio*.

[32] Gal, O., & Chen-Morris, R. (2005). Metaphysical images and mathematical practices: The archaeology of the inverse square law part I.

[33] Gal, O., & Chen-Morris, R. (2005). The archaeology of the inverse square law:(1) Metaphysical images and mathematical practices. *History of science*, *43*(4), 391-414.

[34] Heilbron, J. L. (1982). *Elements of early modern physics*. Univ of California Press.

[35] Whiteside, D. T. (1982). Newton the mathematician. In *Contemporary Newtonian Research*

(pp. 109-127). Springer.

[36] Guía de estudio para padres y alumnos. *Matemáticas: Aplicaciones y conceptos curso 3*. Glencoe/McGraw-Hill.

[37] Álvarez J. Rafael & Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellin.

[38] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE).

[39] Álvarez J. Rafael &Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellín.

[40] Las expresiones algebraicas.

[41] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE).

[42] Consultar tópico *4.8 Factorización de expresiones algebraicas* de este tema.

[43] Consultar tópico *4.4.5. Simplificación de expresiones algebraicas racionales* de este tema.

[44] Ver tópico *4.8. Factorización de expresiones algebraicas de este capítulo*.

[45] *Algebra elemental.* Dr. Aurelio Baldor. Cultural Mexicana S.A. México? (**1972**).

[46] *Wentworth, George; y Smith, David Eugene (1917). Ginn & Co. (ed.). Elementos de Algebra, 2a edición.*

[47] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE).

[48] Kurt Gieck (1981). *Manual de fórmulas técnicas*. Representaciones y servicios de ingeniería S.A. MEXICO

[49] Álvarez J. Rafael &Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellín.

[50] *Algebra elemental.* Dr. Aurelio Baldor. Cultural Mexicana S.A. México (**1972**).

[51] Ver tópico *5.2.2 Variable, variable independiente y variable dependiente* del capítulo 5.

[52] Aula fácil.com: *CUATRINOMIO CUBO PERFECTO DE BINOMIOS*.

[53] Aula fácil.com: *CUATRINOMIO CUBO PERFECTO DE BINOMIOS*.

[54] Vitutor (**2010**) *Racionalización de radicales*. España. Archivo de blog.

[55] Tema ya revisado en el tópico *4.7.2. Binomios conjugados de este capítulo*.

[56] INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL. CECyT "MIGUEL BERNARD PERALES".ACADEMIA DE MATEMÁTICAS.**GUIA DE ALGEBRA PRIMER DEPARTAMENTAL.**

[57] Tomado de DR Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Vicerrectoría de Investigación y Desarrollo, Prepanet | México, 2006.

[58] Wussing Hans (**1998**) *Lecciones de historia de las matemáticas.* España. Siglo XXI de España.

[59] Sullivan Michael (**1998**) *Precálculo*. Pearson Educación.

[60] Poole David (**2007**) *Álgebra lineal: una introducción moderna.* México. Cengage Learning.

[61] Baldor Aurelio.(2009) *Álgebra*México: Grupo Editorial Patria.

[62] Zamora, M, Salvador. Et al (**2007**) *Matemáticas 1*. México. St Editorial .

[63] Prado, P. Carlos Daniel. Et al. (**2006**)*Precálculo*. México. Pearson Educación.

[64] Ruíz Ángel ( ) *Historia Y Filosofía de Las Matemáticas*. Euned.

[65] Fernández C. Horacio. Et al. (**2005**)*Matemáticas previas al cálculo*. Colombia. Universidad de Medellin.

[66] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa.

[67] Jiménez, José de J.,et. **(2006)** Matemáticas 1 SEP. México. Umbral.

[68] Jiménez, José de J.,et al. **(2005)** Matemáticas 2 álgebra. México. Umbral.

[69] Camargo, Leonor.,et al. **(2005)**Alfa 8 con estándares, serie de matemáticas para educación secundaria y media.México. Norma.

[70] Estrada,William F., et al.**(2005)** Espiral 9.México.Norma.

[71] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa.

[72] Peter, Max,et al. **(2007)** Álgebra y trigonometría. España. Reverte.

[73] Gustafson, David R. ( ) Álgebra intermedia. México. Thomson.

[74] Jiménez, José de J. **(2007)** Guía Piense II. México. Umbral .

[75] Ibáñez, Patricia C.,et al. **(2006)** Matemáticas I. México. Cengage Learning.

[76] Smith, Satanley A., et al. (2001) . Álgebra. México. Person.

[77] Palmer, Claude. **(2003)** Matemáticas prácticas. Espeña.Reverte.

[78] Reyes, Araceli G. . ( ) Álgebra superior. México. Thomson.

[79] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa.

[80] Biografías y Vidas.revista electrónica. http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm

[81] Euler(1988),Introduction to analysis of the infnite,Book I, trad. John Blandon,New York:Springer-Verlag

[82] Enciclopedia Británica. http://www.britannica.com/EBchecked/topic/165066/Peter-Gustav-Lejeune-Dirichlet

[83] http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/Filosofiagriega/Platon/TeoriadelasIdeas.htm.

[84] Ignacio Barradas (COMO VES)* (Fecha publicación:30/3/2005)revista electrónica (p.1)

[85] Geral James Holton, Stephen G. Brush.(1996). Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas.España:Reverté

[86] http://www.astroseti.org/articulo/4494/biografia-de-johann-bernoulli

[87] Euler, Introduction to analysis of the infinite, Book I, trns. <john Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988,p.3.

[88] Leonhard Euler.Métodos de máximos y mínimos.España:Universidad Autónoma de Barcelona.

[89] Larson Ron, Hostetler Robert (2008) Pre-calculus. USA: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

[90] Hobson, E. W. (2012). *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614: A Lecture by EW Hobson*. Cambridge University Press.

[91] Malthus, T. R. (1927). An essay on population.