

b) Wir deuten nun die Komponenten des Tensors T ganz wie in dem Schema (13. 13):

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & i c g_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & i c g_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & i c g_3 \\ \frac{i}{c} \mathfrak{S}_1 & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_2 & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_3 & -W \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19. 12)$$

Gemäß (11. 2) lautet die Lorentz-Transformation dieser physikalischen Größen, der Spannungskomponenten $p_{\beta\gamma}$, des Impulses g , der Energiedichte W und der Energieströmung \mathfrak{S} , sofern wir die Koeffizienten $\alpha_{\beta}^{(\gamma)}$ der Koordinaten-Zeit-Transformation aus dem Schema (7. 9) entnehmen, ähnlich den Formeln (13. 14), jedoch mit den durch die Unsymmetrie des *Minkowskischen* Tensors T bewirkten Unterschieden, folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{W' + \beta^2 p'_{11} + v \left(\frac{1}{c^2} \mathfrak{S}'_1 + g'_1 \right)}{1 - \beta^2} \\ \mathfrak{S}_1 &= \frac{\mathfrak{S}'_1 + v^2 g'_1 + v (W' + p'_{11})}{1 - \beta^2}, \\ \mathfrak{S}_2 &= \frac{\mathfrak{S}'_2 + v p'_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \mathfrak{S}_3 &= \frac{\mathfrak{S}'_3 + v p'_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ g_1 &= \frac{g'_1 + \beta^2 \mathfrak{S}'_1 + \frac{v}{c^2} (W' + p'_{11})}{1 - \beta^2}, \\ g_2 &= \frac{g'_2 + \frac{v}{c^2} p'_{21}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & g_3 &= \frac{g'_3 + \frac{v}{c^2} p'_{31}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ p_{11} &= \frac{p'_{11} + \beta^2 W' + v \left(\frac{1}{c^2} \mathfrak{S}'_1 + g'_1 \right)}{1 - \beta^2}, & p_{22} &= p'_{22}, \quad p_{33} = p'_{33}, \\ p_{23} = p'_{23}, \quad p_{31} &= \frac{p'_{31} + v g'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & p_{12} &= \frac{p'_{12} + \frac{v}{c^2} \mathfrak{S}'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ p_{32} = p'_{32}, \quad p_{13} &= \frac{p'_{13} + \frac{v}{c^2} \mathfrak{S}'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & p_{21} &= \frac{p'_{21} + v g'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \dots (19. 13)$$

Setzen wir schließlich die in (16. 3) und (16. 5) aufgezählten Werte der Komponenten von \mathfrak{M} und \mathfrak{B} in die Gl. (11. 8), (11. 13) und (11. 14) ein, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} p_{\beta\beta} &= -\mathfrak{E}_\beta \mathfrak{D}_\beta - \mathfrak{H}_\beta \mathfrak{B}_\beta + \frac{1}{2} \{(\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})\}, & p_{\beta\gamma} &= -\mathfrak{E}_\beta \mathfrak{D}_\gamma - \mathfrak{H}_\beta \mathfrak{B}_\gamma \\ W &= \frac{1}{2} \{(\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})\}, & g &= \frac{1}{c} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}], & \mathfrak{S} &= c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \end{aligned} \right\} (19. 14)$$

Anwendung des Schemas (19. 12) auf (19. 1) ergibt für die räumlichen Komponenten der Viererkraft F , d. h. für die Kraftdichte \mathfrak{F} und für die zeitartige Komponente F_0 die Formeln:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} p - \frac{\partial g}{\partial t}, \quad F_0 = -\frac{i}{c} \left(\operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) \dots\dots (19. 15)$$

Greift man sodann auf (19. 8) und (19. 9) zurück, so findet man den *Impulssatz*:

$$\rho \mathfrak{E}^* + \frac{1}{c} [\mathfrak{J} \mathfrak{B}] + \frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{div} p \dots\dots\dots (19. 16)^*$$

und den *Energiesatz*:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} + (\mathfrak{J} \mathfrak{E}^*) + (\rho \mathfrak{F}) = 0 \dots\dots\dots (19. 17)$$

Die Formeln (19. 14) bis (19. 17) gelten für jedes Inertialsystem.

c) Wir gehen an die Kritik dieser Gleichungen. Der Impulssatz (19. 16) unterscheidet sich von dem für ruhende Körper geltenden Satz dadurch, daß die treibende Kraft \mathfrak{E}^* an die Stelle der Feldstärke \mathfrak{E} getreten ist. Dies aber ist ganz im Sinne von § 16. Im Energiesatz (19. 17) ist zu den für

*) In der Literatur finden sich immer wieder Zweifel, ob die Lorentz-Kraft auf den elektrischen Strom durch die Induktion \mathfrak{B} und nicht durch die Feldstärke \mathfrak{H} oder einen anderen magnetischen Vektor bestimmt ist. Nun beruht das Auftreten von \mathfrak{B} in (19. 16) erstens auf der Zusammenfassung von \mathfrak{E} und \mathfrak{B} zu \mathfrak{M} in (16. 3), an der sich nichts ändern läßt, es sei denn, daß man die *Maxwellschen* Gleichungen (16. 1) verläßt; zweitens auf der zu (19. 1) zusammengefaßten Energie- und Impulsgleichung, die in dieser Form zu den Grundlagen der gesamten Relativitätstheorie, auch der allgemeinen, gehört; drittens auf dem Ansatz (19. 2) für den Welttensor T , dessen Berechtigung Abschnitt d) einer besonders scharfen Prüfung unterzieht. Es paßt dazu, daß auch die treibende Kraft \mathfrak{E}^* nach (16. 25) das Vektorprodukt $[\rho \mathfrak{B}]$ enthält. Ohne tiefgehenden Eingriff in die ganze Elektrodynamik der Materie läßt sich (19. 16) wohl kaum abändern.

ruhende Körper auftretenden Summanden noch die mechanische Leistung der Kraft \mathfrak{F} hinzugetreten, und die *Joulesche Wärme*

$$Q = (\mathfrak{F}\mathfrak{E}^*) \dots\dots\dots (19. 18) *$$

berechnet sich statt aus der Feldstärke ebenfalls aus der treibenden Kraft — ganz im Sinne von § 16. Der elektromagnetische Impuls \mathfrak{g} aus (19. 16) ist zwar der ursprünglichen *Maxwellschen* Theorie fremd. Nachdem wir aber in § 13 einen solchen für den leeren Raum eingeführt haben, um z. B. der Tatsache des Strahlungsdruckes zu genügen, können wir diesem Impuls für das Innere der Materie die Berechtigung nicht absprechen. Für eine empirische Entscheidung darüber ist der Betrag von $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$ stets zu gering.

Auf umstrittenes Gebiet führt jedoch die Diskussion der Gl. (19. 14). Zwar finden wir für Energiedichte W und Energiestrom \mathfrak{S} die uns geläufigen Ausdrücke wieder, nur verallgemeinert auf bewegte Körper**). Sonst aber wirkt sich die Unsymmetrie des *Minkowskischen* Weltensors T in tiefgreifenden Änderungen aus. Erstens hebt sie die gewohnte Symmetrie des Spannungstensors p auf, zweitens die in (13. 6) für den leeren Raum festgelegte und, wie wir später sehen werden, auch in der Mechanik bewährte Beziehung $c^2 \mathfrak{g} = \mathfrak{S}$. Manche Physiker, welche auf diese Form des Satzes von der Trägheit der Energie besonderen Wert legten, suchten deshalb den *Minkowskischen* Tensor durch einen symmetrischen zu ersetzen³⁾; wir können uns ihnen nicht anschließen.

Die Unsymmetrie des auf K^0 bezogenen Tensors p^0 bedeutet nämlich, daß [siehe den Anhang, Regel $(\beta\beta)$] das Feld auf jeden Teil des Körpers ein Drehmoment ausübt, und zwar ist dieses pro Volumeneinheit gleich $[\mathfrak{E}^0 \mathfrak{D}^0] - [\mathfrak{H}^0 \mathfrak{B}^0]$, weil aus (19. 14) folgt

$$p_{23}^0 - p_{32}^0 = - [\mathfrak{E}^0 \mathfrak{D}^0]_1 - [\mathfrak{H}^0 \mathfrak{B}^0]_1 \text{ usw. } \dots\dots\dots (19. 19)$$

Es verschwindet zwar beim isotropen Körper und beim kubischen Kristall, bei welchen \mathfrak{E}^0 und \mathfrak{D}^0 , \mathfrak{H}^0 und \mathfrak{B}^0 dieselbe Richtung haben. Aber in anderen Kristallsystemen tritt es auf und äußert sich z. B. in der experimentell

*) Da die vorrelativistische Definition des Begriffs „zugeführte Wärme“ sich genau genommen auf ruhende Körper bezieht, enthält (19. 18) eine Definition, nämlich die Verallgemeinerung der früheren Definition auf bewegte Körper. Man könnte auf ihrer linken Seite noch einen Faktor $f(q)$ hinzufügen mit der einzigen Einschränkung $f(0) = 1$. Derselbe Faktor am Q träte dann später in der den ersten Hauptsatz formulierenden Gleichung (21. 21) auf und pflanzte sich durch die ganze Thermodynamik fort. Logisch läge darin keine Schwierigkeit; nur wäre es eine unzweckmäßige Modifikation. Wir folgen der *Planckschen* Durchführung der Thermodynamik bewegter Körper, wenn wir diesen Faktor fortlassen. Siehe auch die Anmerkung zu § 23, Abschnitt c.

***) Freilich ist W nicht immer positiv; siehe die Diskussion am Ende von Abschnitt d.

nachgewiesenen Richtkraft eines homogenen Magnetfeldes auf eine magnetische Kristallkugel⁴). Es nützt nichts, eine Theorie zu ersinnen, welche für das Ruhssystem die Gleichung $c^2 \mathfrak{g} = \mathfrak{S}$ aufrecht erhält. *Tatsachen der Kristallphysik erzwingen die Unsymmetrie von p^0 , so daß diese Gleichung schon deshalb für alle anderen Inertialsysteme versagt* *).

d) Außerdem aber entscheidet noch ein anderes Kriterium für die *Minkowskische* gegen die konkurrierenden Formen des Tensors T . § 18c betonte, die Strahlgeschwindigkeit einer ebenen Welle,

$$w = \frac{\mathfrak{S}}{W} \dots\dots\dots (19. 20)$$

müsse dem Additionsgesetz (5. 6) für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes genügen. (Wir verstehen in diesem und dem folgenden Abschnitt unter \mathfrak{S} und W zeitliche Mittelwerte, ohne dies durch Änderung der Bezeichnung zu markieren.) Dies läßt sich nun in der Tat aus den Gl. (19. 13) und (19. 14) beweisen, nicht aber aus jenen anderen Ansätzen⁵). Gehen wir deshalb nochmals auf die schon in § 18 behandelte ebene, linear polarisierte Welle ein.

Für ihren Impuls und Energiestrom folgt aus (19. 14) bei Berücksichtigung von (18. 4a) und (18. 10) sowie der Rechenregel δ aus dem Anhang:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c} [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{1}{\lambda\nu} [\mathfrak{D}[e\mathfrak{E}]] = \frac{1}{\lambda\nu} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) e,$$

$$\mathfrak{S} = c [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \lambda\nu [\mathfrak{E}[\mathfrak{s}\mathfrak{D}]] = \lambda\nu (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) \mathfrak{s}.$$

Nun ist aber nach (18. 6) und (19. 14) $(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = W$; folglich:

$$\frac{\mathfrak{g}}{W} = \frac{e}{\lambda\nu}, \quad w = \frac{\mathfrak{S}}{W} = \lambda\nu \mathfrak{s} \dots\dots\dots (19. 21)$$

*) Nach der phänomenologischen Theorie läßt sich zwar für eine *starre* Kugel nichts über die Symmetrie des Spannungstensors im Innern aussagen. Ist er symmetrisch, so üben nämlich die *Maxwellschen* Spannungen im (leeren) Außenraum das in Rede stehende Drehmoment *auf die Oberfläche* aus. Erst eine Beobachtung der elastischen Deformation der Kugel könnte beweisen, daß dies Moment im Inneren angreift; die elektromagnetischen Spannungen also unsymmetrisch sind. Aber jede molekulare Theorie des Paramagnetismus oder der dielektrischen Erscheinungen verlegt das Drehmoment in das Innere und hat damit Erfolg. Wir möchten daher die Ansicht vertreten, daß auch bei jenen Versuchen über das Gesamt-Drehmoment Unsymmetrie des Tensors als Ursache anzunehmen ist.

Tritt t nicht in φ und \mathfrak{A} , infolgedessen auch nicht explizite in L auf, so ist H eine Konstante der Bewegung, und zwar, wie auch (20 a. 20) bestätigt, ihre Energie.

Unter Verwendung der kartesischen Koordinaten x_α schließen wir nun aus (20 a. 11) und (20 a. 5):

$$p_\alpha = \frac{m q_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}_\alpha \dots \dots \dots (20 a. 19 a)$$

Da in diesem Fall die verallgemeinerten Impulse p_α in die Komponenten des Raumvektors

$$\mathfrak{p} = \frac{m \mathfrak{q}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}; \dots \dots \dots (20 a. 19 b)$$

übergehen, haben wir sie hier mit deutschen Buchstaben bezeichnet.

Die Definition (20 a. 12) besagt dann, daß

$$H = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + e\varphi \dots \dots \dots (20 a. 20)$$

ist; folglich ergibt der Übergang von den Geschwindigkeits- zu den Impulskomponenten

$$H(x_\alpha, p_\alpha) = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}\right)^2} + e\varphi \dots \dots \dots (20 a. 21)$$

c) Trotz der formalen Übereinstimmung der relativistischen *Lagrange*-schen und *Hamilton*-schen Gleichungen mit den entsprechenden der *Newton*-schen Dynamik leisten die ersteren erheblich weniger. Bei der *Newton*-schen Dynamik nämlich genügte sowohl die eine, wie die andere Art dieser Differentialgleichungen zur *vollständigen* Bestimmung der Bewegung beliebig vieler Massenpunkte, sobald noch die erforderlichen Anfangsbedingungen gegeben sind. In der Relativitätstheorie müssen wir uns wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Wirkungen auf *einen* Massenpunkt beschränken und erfahren aus (20 a. 4) oder (20 a. 18) nichts über sein Eigenfeld und dessen Rückwirkung.

Bei gleichförmiger Bewegung übt das Eigenfeld freilich keine Kraft auf den Ladungsträger aus, weil dies für das Ruhssystem zutrifft und die Transformation Gl. (13. 17) somit auch für kein anderes Bezugssystem eine solche Kraft ergibt. Jede Beschleunigung hingegen verursacht nach den *Maxwellschen* Gleichungen ein Ausstrahlungsfeld, welches die Bewegung bremst. Nur für hinreichend kleine Beschleunigung kann man davon absehen und dann, bei gegebenen Potentialen φ und \mathfrak{A} , aus (20a. 4) oder (20a. 18) Bahn und Geschwindigkeit des Körpers ermitteln.

§ 21. Absolute und relative Spannungen

a) Impuls- und Energiesatz haben wir in § 20 in zwei verschiedenen Formen kennengelernt. Einerseits gaben wir ihnen die Form der Gl. (20. 3), bei der wir aber jetzt statt der Trägheitskraft \mathfrak{F} und der vom Körper produzierten Wärme Q die äußere, dem Vierervektor F_a aus § 20 entsprechende Kraftdichte

$$F_a = - \mathfrak{F} \dots\dots\dots (21. 1)$$

und die von außen zugeführte Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit

$$Q_a = - Q \dots\dots\dots (21. 2)$$

einführen und somit setzen:

$$F_a - \text{div } p = \frac{\partial g}{\partial t} \quad \left| \quad (q F_a) + Q_a - \text{div } \mathfrak{S} = \frac{\partial W}{\partial t} \dots\dots (21. 3)$$

Andererseits schrieben wir beide Sätze in die Formen von (20. 17) und (20. 20) um. Wenn wir jetzt noch die pro Zeiteinheit zugeführte Wärme

$$R_a = \int Q_a \delta V \dots\dots\dots (21. 4)$$

berücksichtigen, lauten sie:

$$R_a = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \left| \quad (q R_a) + R_a = \frac{dE}{dt} \dots\dots\dots (21. 5)$$

Letzteres bewies freilich § 20 nur für vollständige statische Systeme; wir wollen den Beweis auf beliebige Teile materieller Systeme ausdehnen.

In (21. 3) sind die zeitlichen Differentiationen bei konstanten Raumkoordinaten auszuführen, in (21. 5) aber für gewisse materielle Bereiche, die selbst ihre Orte mit der Zeit ändern. In der klassischen Hydrodynamik entspricht den Gl. (21. 3) die *Eulersche* Form der Bewegungsgleichungen;

wir suchen hier die *Lagrangesche* Form, allerdings nicht nur für Flüssigkeiten. Dies Problem ist keineswegs erst mit der Relativitätstheorie aufgetaucht, bekommt freilich in ihr ein anderes Gesicht, weil die Impulsdichte nicht immer die Richtung der Geschwindigkeit hat.

b) Weil der Tensor p in der *Eulerschen* Gleichung steht, gibt er für bewegte Körper nicht unmittelbar die elastischen Spannungen an. *Planck* bezeichnete ihn als den Tensor der Impulsströmung wegen der Analogie zwischen den beiden Gleichungen (21. 3), bei welcher $\text{div } p$ dem Term $\text{div } \mathfrak{S}$ entspricht. Wir unterscheiden zwischen den *absoluten Spannungen* $p_{\alpha\beta}$ und den *relativen Spannungen* mit dem Tensor

$$t_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta} - g_{\alpha} q_{\beta} \quad \text{oder} \quad t = p - [[g q]], \dots\dots\dots (21. 6)$$

ebenso zwischen dem *absoluten Energiestrom* \mathfrak{S} und dem *relativen Energiestrom*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S} - W q; \dots\dots\dots (21. 7)$$

diese unterscheiden sich durch den *Konvektionsstrom der Energie* $W q$. In der Elektrodynamik traten nur die absoluten (*Maxwellschen*) Spannungen auf.

Nach den Rechenregeln ($\delta\delta$) und ($\delta\delta'$) im Anhang gilt für einen beliebigen Vektor g und einen beliebigen Skalar W

$$\frac{d}{dt}(g \delta V) = \dot{g} \delta V \quad \left| \quad \frac{d}{dt}(W \delta V) = \dot{W} \delta V \dots\dots\dots (21. 8)$$

mit den Definitionen:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div} [[g q]] \quad \left| \quad \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} (W q) \dots\dots\dots (21. 9)$$

Für (21. 3) läßt sich somit unter Einführung der relativen Spannungen und des relativen Energiestromes schreiben:

$$\mathfrak{F}_a - \text{div } t = \dot{g} \quad \left| \quad (q \mathfrak{F}_a) + Q_a - \text{div } \mathfrak{T} = \dot{W} \quad (21. 10)$$

Multiplikation mit dem materiellen Volumenelement δV und Integration über einen beliebigen materiellen Bereich macht daraus die *Lagrangeschen Gleichungen*:

$$\mathfrak{R}_a + \int t_n d\sigma = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \left| \quad (q \mathfrak{R}_a) + R_a + \int \mathfrak{T}_n d\sigma = \frac{dE}{dt} \quad (21. 11)$$

Dabei haben wir $\int \operatorname{div} t \delta V$ und $\int \operatorname{div} \mathfrak{E} \delta V$ nach den Rechenregeln ($\alpha\alpha$) und (ρ) im Anhang in Oberflächenintegrale verwandelt*). Bei Anwendung auf vollständige statische Systeme fallen diese fort, weil an deren Begrenzungen t_n und \mathfrak{E}_n Null sind; dann kommen wir auf (21. 5) zurück. *Nach (21. 11) fallen die elastischen unter den Begriff der relativen Spannungen.*

c) Wir wollen die relativen Spannungen und den relativen Energiestrom durch Größen ausdrücken, die sich auf das Ruhssystem des betrachteten Körperstücks beziehen. Dazu haben wir in die Definitionsgleichungen (21. 6) und (21. 7) die in (20. 6) aufgezählten Werte von $p_{\alpha\beta}$, g , W und \mathfrak{S} einzusetzen. Dies ergibt:

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= p_{11}^0, & t_{22} &= p_{22}^0, & t_{33} &= p_{33}^0, \\ t_{23} &= p_{23}^0, & t_{31} &= \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} p_{31}^0, & t_{12} &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} p_{12}^0, \\ t_{32} &= p_{32}^0, & t_{13} &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} p_{13}^0, & t_{21} &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} p_{21}^0, \\ \mathfrak{E}_1 &= q \cdot p_{11}^0 = q \cdot t_{11}, \\ \mathfrak{E}_2 &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} q \cdot p_{12}^0 = q \cdot t_{12}, \\ \mathfrak{E}_3 &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} q \cdot p_{13}^0 = q \cdot t_{13}. \end{aligned} \right\} \dots (21. 12)$$

Die letzten Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu der Vektorgleichung

$$\mathfrak{E} = [qt^*], \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{S} = Wq + [qt^*] \dots \dots \dots (21. 13)$$

wobei t^* [siehe Rechenregel (τ)] der zu t duale Tensor ($t_{\beta\gamma}^* = t_{\gamma\beta}$) ist.

Der relative Energiestrom \mathfrak{E} rührt also allein von den elastischen Spannungen her; das Integral $\int \mathfrak{E}_n d\sigma$ im Energiesatz (21. 11) gibt deren an der Oberfläche des betrachteten Körperstücks geleistete Arbeit an. Wir machen darauf aufmerksam, daß wir von räumlichen Temperaturunterschieden und der dadurch veranlaßten Wärmeströmung stets absehen.

Gl. (21. 13) existiert schon in der klassischen Mechanik, mit dem Unterschied, daß dort der Elektrizitätstensor t symmetrisch und deshalb mit dem ihm dualen Tensor t^* identisch ist. Diese Gleichung enthält, am deut-

*) Nach dem Anhang, Rechenregel (ρ), ist

$$t_{n\alpha} = t_{\alpha 1} \cos (n x_1) + t_{\alpha 2} \cos (n x_2) + t_{\alpha 3} \cos (n x_3).$$

lichsten in ihrer zweiten Form, die Theorie jeglicher mechanischen Energieübertragung, sei es durch ein gespanntes Zugseil, sei es durch die tordierte Welle zwischen Dampfmaschine und, sagen wir, Schiffsschraube, sei es durch den Strom unter Druck stehender Flüssigkeiten oder Gase.

Für die transversalen, d. h. zur Geschwindigkeit senkrechten Impulskomponenten, welche in (20. 7) auftraten, läßt sich nach (21. 12) und (5. 4) schreiben:

$$\mathfrak{G}_2 = \frac{q}{c^2 - q^2} \int t_{21} \delta V, \quad \mathfrak{G}_3 = \frac{q}{c^2 - q^2} \int t_{31} \delta V.$$

d) Als ein markantes Beispiel behandeln wir zunächst die *adiabatisch-isobare Dynamik*, d. h. die Dynamik eines Körpers, welchem keine Wärme zugeführt wird ($R_\alpha = 0$) und der keinen anderen äußeren Einwirkungen ausgesetzt ist als einem allseitig gleichen, zeitlich konstanten Druck p . Herrscht ein solcher im Ruhesystem K^0 , so ist $p_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} p$, daher nach (21. 12) auch $t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}^* = \delta_{\alpha\beta} p$. *Der allseitig gleiche Druck p ist eine Invariante der Lorentz-Transformation (Planck)*. Der relative Energiestrom ist dann nach (21. 13)

$$\mathfrak{E} = p \cdot q \dots\dots\dots (21. 14)$$

Die allgemeinen Formeln (20. 7) gehen für diesen Fall über in

$$\mathfrak{G} = \frac{E^0 + p V^0}{c \sqrt{c^2 - q^2}} q \left| E = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(E^0 + \frac{q^2}{c^2} p V^0 \right) \right. \quad (21. 15)$$

In der Impulsgleichung (21. 11) ist jetzt $\int t_n d\sigma = 0$; aus dem Druck p resultiert keine Kraft. In der Energiegleichung (21. 11) hingegen ist von Null verschieden die Kompressionsarbeit

$$\int \mathfrak{E}_n d\sigma = p \int q_n d\sigma = - p \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots (21. 16)$$

denn $q_n d\sigma$ ist die Volumenabnahme pro Zeiteinheit infolge der Verrückung q_n des Flächenstückes $d\sigma^*$). Folglich lauten jetzt diese Gleichungen

$$\mathfrak{R}_\alpha = \frac{E^0 + p V^0}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{c q}{\sqrt{c^2 - q^2}} \right) \left| (q \mathfrak{R}_\alpha) = \frac{d}{dt} (E + p V) \dots (21. 17) \right.$$

*) Hier tritt erneut die Vernachlässigung zutage, welche schon in der Dynamik des vollständigen statischen Systems steckte. Hätten alle Punkte des Körpers genau dieselbe Beschleunigung, so träte nicht die Relativbewegung unter ihnen ein, welche zur Lorentz-Kontraktion führt.

Die Analogie zur Dynamik des vollständigen statischen Systems (des Massenpunktes) wird vollständig, wenn wir aus der zweiten der Gl. (21. 15) ableiten:

$$E + pV = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} (E^0 + pV^0) \dots\dots\dots (21. 18)$$

Denn diese Formel unterscheidet sich von der Energiegleichung in (20. 9) nur durch den Ersatz von E durch $E + pV$, und dieser Unterschied ist auch der einzige zwischen den Impulsgleichungen in (21. 15) und (20. 9). Deswegen ist jetzt die Masse

$$m = \frac{1}{c^2} (E^0 + pV^0) \dots\dots\dots (21. 18a)$$

Diese Änderung ist grundsätzlich von Bedeutung, weil sie die Beschränkung des *Einsteinschen* Gesetzes $m = E^0/c^2$ auf vollständige statische Systeme besonders deutlich macht; numerisch macht sie nie etwas Merkliches aus, da E^0 weit überwiegt.

Der mechanische Welttensor hat in diesem Fall die Komponenten

$$T_{ik} = (W^0 + p) \cdot Y_i Y_k + p \delta_{ik} \dots\dots\dots (21. 19)$$

Denn im Ruhssystem, in welchem $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$, $Y_0 = i$ ist, ergeben sich daraus, wie es sein muß, die Werte

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = p, \quad T_{00} = -W^0, \quad \text{alle anderen } T_{ik} = 0.$$

e) Im Gegensatz zu Abschnitt d) lassen wir nun auch Wärmezufuhr zu, behalten aber die Voraussetzung eines allseitig gleichen Druckes p bei, so daß sowohl die Aussage $\int t_n d\sigma = 0$ als Gl. (21. 16) in Kraft bleibt. Bezeichnen wir sodann die im Zeitintervall dt zugeführte Wärme mit

$$Q_a = R_a dt, \dots\dots\dots (21. 20)$$

so folgt aus (21. 11):

$$Q_a = dE + p \cdot dV - (qd\mathfrak{G}) \dots\dots\dots (21. 21)$$

Für die Transformation von Q_a gilt nach (19. 33) wegen der Zeitdilatation

$$dt^0 = dt \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c};$$

$$Q_a = Q_a^0 \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \dots\dots\dots (21. 22)$$

Weil für ruhende Körper die isobare Änderung von

$$U^0 = E^0 + p \cdot V^0$$

die zugeführte Wärme Q_a^0 mißt, bezeichnet man bekanntlich U^0 als die *Wärmefunktion* (Enthalpie). Wir müssen gemäß (21. 21) diese für bewegte Körper als

$$U = E + pV - (q\mathfrak{G}) \dots\dots\dots (21. 23)$$

definieren, und hinzufügen, daß bei Berechnung der Wärme Q_a außer p auch die Geschwindigkeit q dem Betrage nach konstant zu halten ist. Die Transformation von U lautet nach (21. 22) oder auch nach (21. 15) und (21. 18):

$$U = U^0 \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \dots\dots\dots (21. 24)$$

In Gl. (21. 21) haben wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik formuliert. Für diese ist aber der zweite Hauptsatz, das Entropieprinzip, das eigentliche Charakteristikum. Auf ihn werden wir in § 23 zu sprechen kommen.

Auch für die klassische Dynamik und Thermodynamik formuliert Gl. (21. 21) den ersten Hauptsatz. Aber in ihr ist

$$(q d\mathfrak{G}) = q d(mq) = d\left(\frac{1}{2}mq^2\right)$$

die Zunahme der kinetischen Energie, und $E - \frac{1}{2}mq^2$ ist die innere, durch die Bewegung nicht beeinflusste Energie. Daher führt man meist auch der Form nach nur diese ein und braucht dann das Glied $(q d\mathfrak{G})$ nicht mehr. Dies ändert sich in der Relativitätstheorie, weil sie (siehe § 20i) keine kinetische Energie kennt. Andererseits hat in der klassischen Theorie der Impuls \mathfrak{G} nichts mit dem inneren Zustand zu tun, sondern hängt ausschließlich von der Masse, also einer nach dieser Theorie unveränderlichen Größe, und der Geschwindigkeit ab. Auch darin weicht die Relativitätstheorie von ihr ab. So hat also die Energiegleichung (21. 21) trotz der alten Form hier einen ganz neuen Inhalt.

§ 22. Der Drehimpuls

a) Über die Symmetrie des mechanischen Tensors T haben wir bisher nicht gesprochen; wir müssen es nachholen.

In § 19 stellte sich der Welttensor des elektromagnetischen Feldes innerhalb der Materie, im Gegensatz zu dem im leeren Raum, als unsymmetrisch heraus. Daß dort Impuls und Energiestrom nicht in der Symmetriebeziehung $c^2\mathfrak{g} = \mathfrak{S}$ standen, ist an dieser Stelle ohne Belang; aber wesentlich ist die Unsymmetrie des *Maxwellschen* Spannungstensors schon im Ruhssystem K^0 für alle nichtkubischen Kristalle. Dies bedeutet,

wie dort ausgeführt wurde, ein Drehmoment auf jedes Stück eines solchen Kristalls, und dieses muß aufgenommen werden durch ein von den elastischen Spannungen im Ruhssystem geliefertes entgegengesetztes Drehmoment. Also sind auch die elastischen Spannungen p^0 unsymmetrisch, und diese Unsymmetrie überträgt sich nach dem allgemein gültigen Schema (19. 12) auf den mechanischen Welttensor. Wir verlieren aber wenig, wenn wir solche Kristalle mit elektromagnetischen Feldern von der Betrachtung ausschließen. Dann ist der mechanische Spannungstensor p^0 , wie in der üblichen Elastizitätstheorie, symmetrisch; da auch die Komponenten $T_{0\alpha}$ und $T_{\alpha 0}$, bezogen auf K^0 , einander gleich (nämlich gleich Null) sind, ist der Welttensor T überhaupt symmetrisch. *In allen Bezugssystemen sind daher die absoluten Spannungen durch einen symmetrischen Tensor p dargestellt und es gilt die Plancksche Form des Satzes von der Trägheit der mechanischen Energie:*

$$g = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \dots \dots \dots (22. 1)$$

Im Gegensatz dazu ist der Tensor t der relativen, also der elastischen Spannungen, außer im Ruhssystem unsymmetrisch; aus seiner Definition in (21. 6) folgt nämlich

$$t_{\alpha\beta} - t_{\beta\alpha} = q_{\alpha}g_{\beta} - q_{\beta}g_{\alpha} \dots \dots \dots (22. 1a)$$

Indem wir nach der Regel (τ) des Anhangs den zu t dualen Tensor t^* mit den Komponenten $t^*_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$ einführen, können wir auch schreiben

$$t - t^* = [qg], \dots \dots \dots (22. 2)$$

wo $[qg]$, wie üblich, das Vektorprodukt aus q und g bedeutet.

b) Den in einem bestimmten Raumbereich lokalisierten Drehimpuls definiert schon die klassische Mechanik als den Vektor

$$\mathfrak{L} = \int [r g] dS \dots \dots \dots (22. 3)$$

Der Radiusvektor r verbindet einen beliebigen Anfangspunkt mit einem Punkt im Volumenelement dS . Er ist nicht von der Zeit abhängig. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \int \left[r \frac{\partial g}{\partial t} \right] dS = \int [r, \mathfrak{F}_\alpha - \text{div } p] dS \\ &= \int [r \mathfrak{F}_\alpha] dS + \int [r p_n] d\sigma \dots \dots \dots (22. 4) \end{aligned}$$

Bei dieser Umformung benutzen wir den Impulssatz in der *Eulerschen* Form (21. 3) sowie die Rechenregel ($\beta\beta$) aus dem Anhang. Diese Gleichung bildet die Grundlage der Theorie des *Trouton-Nobleschen* Versuchs in § 13e; Integrationsbereich war dort ein Raum, welcher für alle betrachteten Zeiten den Kondensator und sein elektrisches Feld vollständig umschließt.

Anders aber verläuft die Differentiation bei der Frage nach dem Drehimpuls eines bestimmten Stückes Materie, da dieses sich selbst gegen das in (22. 3) benutzte Inertialsystem bewegt. Da jetzt der Radiusvektor \mathbf{r} von einem festen Anfang zu dem bewegten Volumenelement δV sich in der Zeit dt um $\mathbf{q} dt$ ändert, ist die Änderung des in δV liegenden Drehimpulses

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}, \mathbf{g} \delta V] = [\mathbf{q} \mathbf{g}] \delta V + \left[\mathbf{r}, \frac{d}{dt} (\mathbf{g} \delta V) \right] = \{ [\mathbf{q} \mathbf{g}] + [\mathbf{r} \dot{\mathbf{g}}] \} \delta V.$$

Integration über ein endliches Stück Materie ergibt für dessen Drehimpuls die Änderung

$$\begin{aligned} \frac{d \mathfrak{L}}{dt} &= \int \{ [\mathbf{r} \dot{\mathbf{g}}] + [\mathbf{q} \mathbf{g}] \} \delta V = \int \{ [\mathbf{r}, \mathfrak{F}_a - \text{div } \mathbf{t}] + [\mathbf{q} \mathbf{g}] \} \delta V \\ &= \int [\mathbf{r} \mathfrak{F}_a] \delta V + \int [\mathbf{r} \mathbf{t}_n] d\sigma + \int \{ \mathbf{t}^* - \mathbf{t} + [\mathbf{q} \mathbf{g}] \} \delta V \dots \quad (22. 5) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir außer der *Lagrangeschen* Form (21. 10) des Impulssatzes noch die Rechenregel ($\beta\beta$) aus dem Anhang benutzt. Nach (22. 2) vereinfacht sich (22. 5) zu:

$$\frac{d \mathfrak{L}}{dt} = \int [\mathbf{r} \mathfrak{F}_a] \delta V + \int [\mathbf{r} \mathbf{t}_n] d\sigma \dots \dots \dots (22. 6)$$

$\mathbf{t}_n d\sigma$ ist nach (21. 11) die Kraft, welche die Umgebung auf das betrachtete Körperstück durch das Flächenelement $d\sigma$ überträgt, das Flächenintegral in (22. 6) daher das ganze von der Umgebung auf das Körperstück ausgeübte Drehmoment. Das von diesem auf die Umgebung ausgeübte Drehmoment berechnet sich ebenso, nur daß die Normale \mathbf{n} diesmal die umgekehrte Richtung, \mathbf{t}_n also das umgekehrte Vorzeichen hat. Diese beiden Drehmomente sind somit einander gleich, wie es der Satz der Erhaltung des Drehimpulses fordert.

In der klassischen Mechanik gilt genau dieselbe Umformung, lediglich dadurch vereinfacht, daß Impuls und Geschwindigkeit stets dieselbe Richtung haben, das Vektorprodukt $[\mathbf{q} \mathbf{g}]$ also verschwindet. Nach (22. 2) ist dann der Tensor \mathbf{t} der elastischen Spannungen auch für den bewegten Körper symmetrisch. *In der Relativitätstheorie jedoch verursacht das Auftreten einer transversalen Impulskomponente die Unsymmetrie der relativen (elastischen) Spannungen.*

Bewegt sich ein Körper ohne äußere Kraft und bei unveränderlichem inneren Zustand, ist also in (22. 5) $\dot{g} = 0$, so ändert sich trotzdem sein Drehimpuls im allgemeinen entsprechend der Gleichung

$$\frac{d \mathfrak{L}}{dt} = \int [qg] \delta V = [q \mathfrak{G}] \dots \dots \dots (22. 7)$$

Ein elastisch gespannter Körper bedarf zu gleichförmiger Translationsbewegung eines Drehmoments, außer wenn sein Impuls in die Richtung der Geschwindigkeit fällt. Diese Bedingung erfüllt das vollständige statische System stets. Es bedarf keines Momentes. Die materiellen Teile des Trouton-Nobleschen Kondensators aber sind unter der Einwirkung des elektrischen Feldes gespannt, bedürfen also eines Drehmomentes, um der Erdbewegung gegen das astronomische Inertialsystem ohne Drehung zu folgen. Daß das Feld gerade das erforderliche Drehmoment liefert, ergibt sich aus der Überlegung in § 20g, daß Kondensator und Feld zusammen ein vollständiges statisches System bilden.

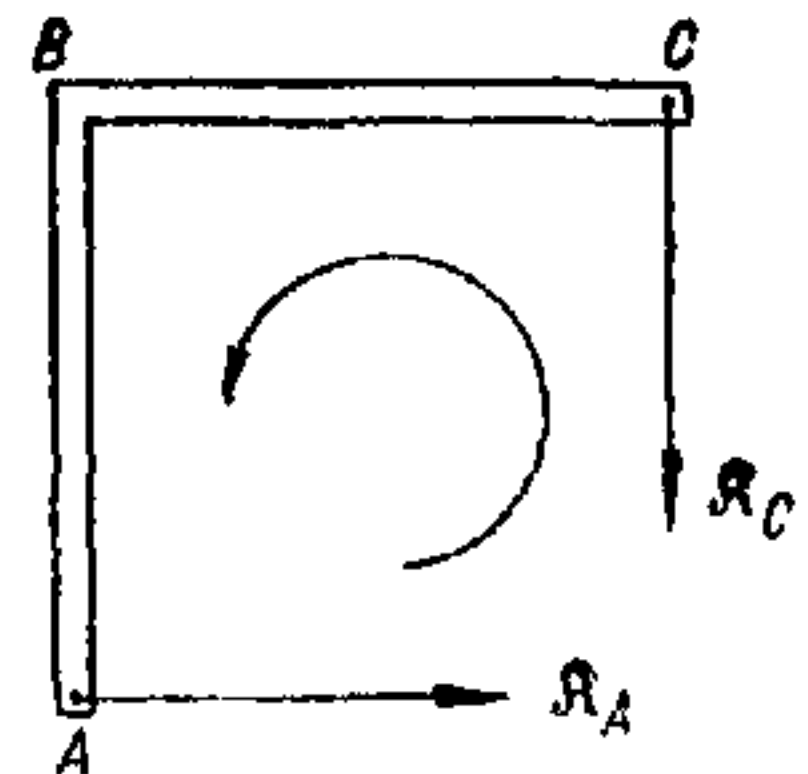


Fig. 21

c) Ein instruktives Beispiel gibt der Winkelhebel¹⁾ (Fig. 21). Er habe den Drehpunkt B und die gleichlangen, zueinander senkrechten Arme BA und BC. In A und C greifen an ihm die Kräfte \mathfrak{R}_A^0 und \mathfrak{R}_C^0 an, erstere parallel zu BC, letztere zu BA. Diese Angaben beziehen sich auf das Ruhssystem K^0 ; die beiden Kräfte müssen in ihm vom gleichen Betrage sein, soll Gleichgewicht bestehen.

In dem Bezugssystem K aber, gegen welches K^0 die Geschwindigkeit q in der Richtung BC besitzt, hat der Arm BA zwar seine Ruhlänge l^0 , BC hingegen ist wegen der Lorentz-Kontraktion auf $l^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ verkürzt. Von den Kräften ist nach den Transformationsformeln (19. 35), in welchen wir für den gegenwärtigen Zweck K^0 an die Stelle von K' , also $q' = 0$ und zudem $R' = 0$ zu setzen haben, die zu q parallele Kraft \mathfrak{R}_A in beiden Bezugssystemen dieselbe. Aber die zu q senkrechte Kraft \mathfrak{R}_C ist auf $\mathfrak{R}_C \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ verringert. Während also in K^0 das auf den Hebel ausgeübte Drehmoment $|\mathfrak{R}_A^0| l^0 - |\mathfrak{R}_C^0| l^0 = 0$, ist es in K gleich

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}| &= |\mathfrak{R}_A| l^0 - |\mathfrak{R}_C| l^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = |\mathfrak{R}_A^0| l^0 - |\mathfrak{R}_C^0| l^0 \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{q^2}{c^2} |\mathfrak{R}^0| l^0 \dots \dots \dots (22. 8) \end{aligned}$$